CAPITOLO 2

MATEMATICA PER LA FISICA
I vettori

Obiettivi

- rappresentare un vettore nel piano ed operare con esso
- scomporre un vettore lungo due direzioni prestabilite
- operare con i vettori nel piano cartesiano
- applicare alla Fisica le conoscenze acquisite

1. Scalari e vettori

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 14

In Fisica si lavora con due tipi di grandezze: le **grandezze scalari** e le **grandezze vettoriali**.

GRANDEZZE SCALARI

Le **grandezze scalari** sono quelle grandezze che sono individuate in modo completo da un numero, il quale esprime la misura della grandezza rispetto all'unità prefissata.

Sono per esempio grandezze scalari il tempo (si misura in secondi con i suoi multipli), la massa (si misura in chilogrammi, con i suoi multipli e sottomultipli), la lunghezza (si misura in metri, con i suoi multipli e sottomultipli), un angolo (si misura in gradi oppure in radianti).
Parlando con un collega di lavoro che ci chiede quante ore abbiamo impiegato ad arrivare in ufficio quella mattina, basta rispondere con un numero, per esempio 2; il numero 2 identifica in modo unico la grandezza scalare *tempo*.
Operare con le grandezze scalari non comporta alcuna difficoltà perché si tratta di operare con i numeri reali:

- se a una lunghezza di 5 metri aggiungiamo una lunghezza di 7,2 metri otteniamo una lunghezza di 12,2 metri;
- dell'appartamento del nostro amico, che è grande il doppio del nostro che è di 120 metri quadrati, possiamo dire che è di 240 metri quadrati.

Non aggiungiamo quindi altro sulle operazioni con le grandezze scalari.

Altre grandezze fisiche, per poter essere descritte, necessitano di un numero maggiore di informazioni; per esempio, se dobbiamo indicare uno spostamen-

to, non basta dire "Mi sono spostato di tre metri", dobbiamo anche indicare in quale direzione e verso ci siamo mossi.
Grandezze come quella di questo esempio si dicono vettoriali.

GRANDEZZE VETTORIALI

Le **grandezze vettoriali** sono quelle grandezze che sono individuate da tre caratteristiche:

- una **direzione**, che indica la retta lungo cui agisce la grandezza
- un **verso**, determinato dal senso di percorrenza della retta che rappresenta la direzione
- una **intensità** o **modulo**, che è il valore numerico che esprime la misura della grandezza rispetto a una certa unità.

Altri esempi di grandezze vettoriali oltre agli spostamenti sono la velocità e l'accelerazione.

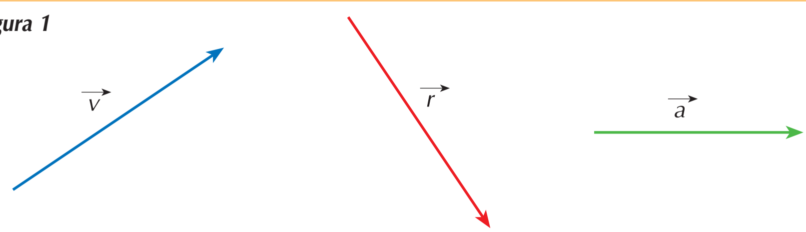
Per rappresentare una grandezza vettoriale si usa un **vettore** (abbiamo già usato i vettori a proposito della traslazione).
Un vettore si rappresenta mediante un segmento orientato e si indica di solito con una lettera minuscola cui viene sovrapposta una freccia (***figura 1***):

$$\vec{v} \qquad \vec{s} \qquad \vec{a}$$

Il modulo di un vettore si indica con la stessa lettera senza la freccia:

$$v \qquad s \qquad a$$

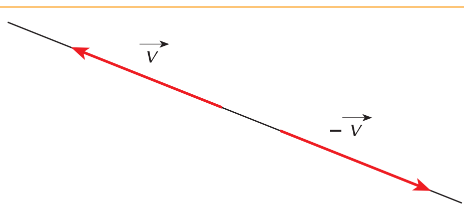
Figura 1



Un vettore è **nullo** se il segmento orientato che lo rappresenta ha il primo estremo che coincide con il secondo; la direzione e il verso di un vettore nullo sono necessariamente arbitrari. Il vettore nullo si indica con il simbolo $\vec{0}$ e il suo modulo è uguale a zero.

Se due vettori hanno la stessa direzione e lo stesso modulo ma versi opposti, diremo che sono opposti (***figura 2***). L'opposto di un vettore $\vec{v}$ si indica con $-\vec{v}$.

Figura 2



Le grandezze vettoriali si possono sommare e sottrarre, fra esse si possono anche eseguire dei prodotti, ma le regole sono diverse rispetto a quelle delle operazioni con i numeri.

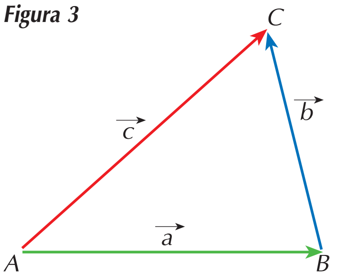
Per esempio, consideriamo un oggetto che si sposta da un punto A a un punto B e poi da B a un punto C (***figura 3***):

- lo spostamento corrispondente al tratto AB si può descrivere con il vettore $\vec{a}$, supponiamo di modulo 4,
- lo spostamento corrispondente al tratto BC si può descrivere con il vettore $\vec{b}$, supponiamo di modulo 3,
- lo spostamento complessivo, corrispondente al tratto AC, è descritto dal vettore $\vec{c}$ che si può considerare la somma dei due spostamenti $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Non possiamo però dire che il vettore $\vec{c}$ ha come modulo la somma dei moduli di $\vec{a}$ e $\vec{b}$: il modulo di $\vec{c}$ non è uguale a $4 + 3 = 7$.
Per le operazioni con le grandezze vettoriali è necessario introdurre altre regole.

Figura 3



2. LE OPERAZIONI CON I VETTORI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 14

L'addizione

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si definisce loro **somma** il vettore $\vec{c}$ che si ottiene con la seguente regola:

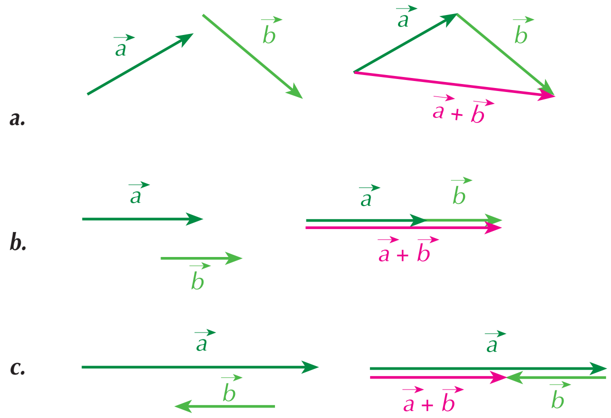
- si dispongono i due vettori in modo che $\vec{b}$ sia consecutivo ad $\vec{a}$
- si considera il vettore $\vec{c}$ che ha come origine l'origine di $\vec{a}$ e come secondo estremo l'estremo di $\vec{b}$.

Di $\vec{c}$ si dice che è il **vettore risultante** della somma $\vec{a} + \vec{b}$.

*Questa regola è nota con il nome di **punta-coda** perché il secondo vettore ha la coda dove il primo ha la punta.*

In ***figura 4*** abbiamo evidenziato i casi che si possono presentare.

Figura 4

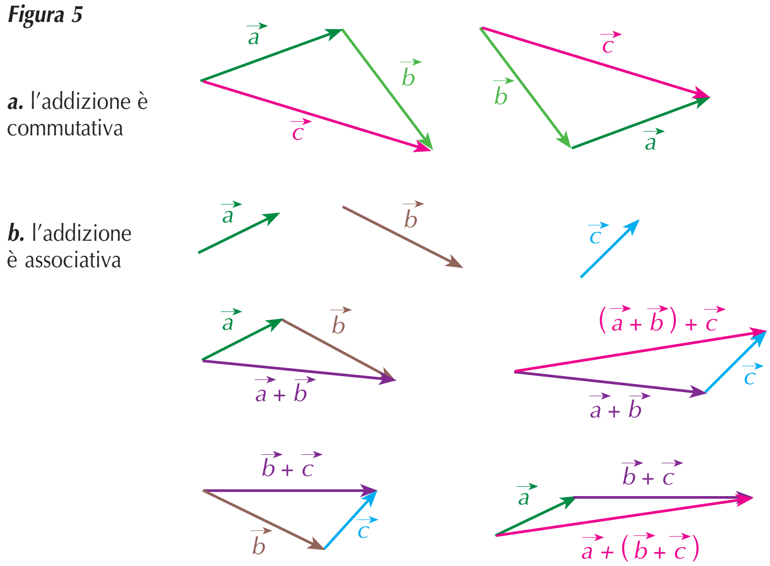


L'addizione fra vettori gode delle seguenti proprietà:

- è **commutativa**: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (***figura 5a*** di pagina seguente)
- è **associativa**: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (***figura 5b***)

- possiede **elemento neutro**, il vettore nullo $\vec{0}$
- ogni vettore $\vec{a}$ ha il suo opposto $-\vec{a}$
- la somma di due vettori opposti è il vettore nullo.

Figura 5

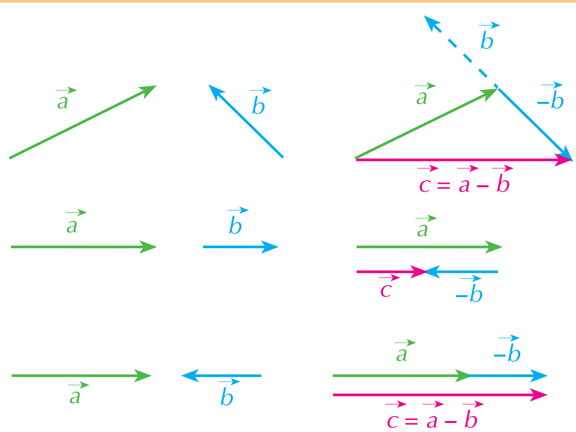


La sottrazione

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, si dice loro **differenza** il vettore $\vec{c}$ che si ottiene sommando $\vec{a}$ con l'opposto di $\vec{b}$.

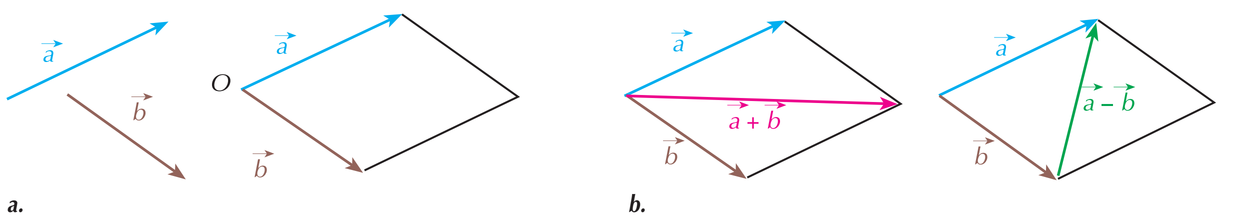
In ***figura 6*** puoi vedere qualche esempio.

Figura 6



LA SOMMA E LA DIFFERENZA CON LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA

Le definizioni date di somma e differenza di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, che costituiscono anche un procedimento per determinarle, equivalgono a quella che solitamente viene indicata come "regola del parallelogramma".
Disegnati i due vettori in modo che le loro origini coincidano in un punto O, si costruisce il parallelogramma che ha per lati i due vettori (***figura 7a*** di pagina seguente): la loro somma è la diagonale uscente da O, la loro differenza è l'altra diagonale (orientata verso il primo termine della sottrazione) (***figura 7b***).



La moltiplicazione per uno scalare

Consideriamo un vettore $\vec{a}$ e un numero reale k non nullo (uno scalare); si dice **prodotto di $\vec{a}$ per k**, e si indica con $k \cdot \vec{a}$, il vettore che ha

- la stessa direzione di $\vec{a}$
- lo stesso verso di $\vec{a}$ se è $k > 0$, verso opposto ad $\vec{a}$ se è $k < 0$
- modulo che si ottiene moltiplicando il modulo di $\vec{a}$ per il valore assoluto di k.

Se è $k = 0$ il prodotto $k \cdot \vec{a}$ è il vettore nullo.

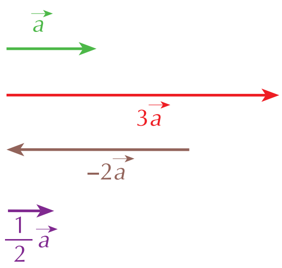
In ***figura 8*** puoi vedere qualche esempio.
La moltiplicazione di un vettore per un numero reale gode delle seguenti proprietà:

- è **commutativa**: $k\vec{a} = \vec{a}k$
- è **associativa**: $(hk)\vec{a} = h(k\vec{a})$ con $h,k \in R$
- il numero 1 è l'**elemento neutro**: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$
- valgono le due **proprietà distributive**:

$$k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b} \qquad \text{e} \qquad (h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$$

In particolare, ogni vettore $\vec{v}$ può essere visto come il prodotto del suo modulo v per il vettore unitario $\vec{u}$ che ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{v}$: $\vec{v} = v \cdot \vec{u}$.

Figura 8



*Un vettore di modulo uguale a 1 si dice anche **versore**.*

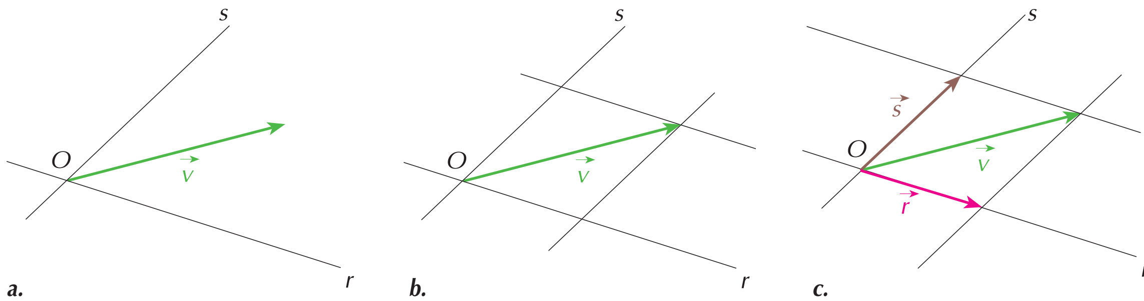
La scomposizione di un vettore

Ogni vettore può essere considerato come la risultante di altri due vettori di cui sono note le direzioni.
Supponiamo che il vettore $\vec{v}$ in ***figura 9*** di pagina seguente sia il vettore risultante di altri due vettori $\vec{r}$ e $\vec{s}$ di cui sono note le direzioni (rappresentate dalle rette r e s nella ***figura 9a***). I due vettori $\vec{r}$ e $\vec{s}$ si ottengono applicando in senso inverso la regola del parallelogramma:

- si tracciano dal secondo estremo del vettore $\vec{v}$ le parallele alle direzioni r e s (***figura 9b***)
- individuati gli altri due vertici del parallelogramma, si tracciano i vettori $\vec{r}$ e $\vec{s}$ uscenti da O (***figura 9c***).

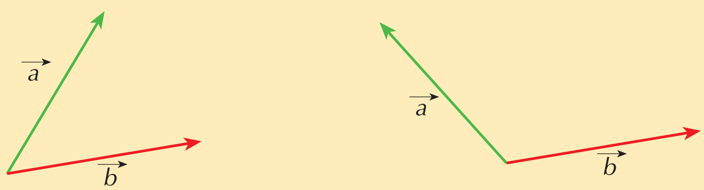
Dei due vettori $\vec{r}$ e $\vec{s}$ si dice che sono le **componenti del vettore** $\vec{v}$ lungo le direzioni prescelte.

Figura 9



VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Costruisci il vettore somma $\vec{a} + \vec{b}$ nei seguenti casi:



2. Costruisci il vettore differenza $\vec{a} - \vec{b}$ nei seguenti casi:

3. I VETTORI NEL PIANO CARTESIANO

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 16

Vettori uscenti dall'origine

Per come lo abbiamo definito, si può sempre supporre che un vettore $\vec{v}$ nel piano cartesiano sia rappresentato da un segmento orientato che ha la sua origine nell'origine O degli assi. In tal caso, esso può essere scomposto nei due vettori $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ che hanno per direzioni rispettivamente l'asse x e l'asse y (***figura 10***) e risulta quindi che $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$.

Si conviene di associare al modulo dei vettori $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ un segno positivo se essi giacciono sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate, un segno negativo se essi giacciono sui semiassi negativi. In questo modo, il modulo del vettore $\vec{v}_x$ è semplicemente l'ascissa del punto P, secondo estremo del vettore $\vec{v}$, il modulo del vettore $\vec{v}_y$ è l'ordinata del punto P.

Per indicare che v_x e v_y sono i moduli delle componenti del vettore $\vec{v}$ lungo gli assi cartesiani si scrive, con una notazione che abbiamo già usato a proposito delle traslazioni:

$$\vec{v}(v_x, v_y)$$

Per esempio, il vettore $\vec{v}(3, -2)$ è rappresentato in ***figura 11***.

Se ora indichiamo con α l'angolo orientato che il vettore forma con la direzio-

Figura 10

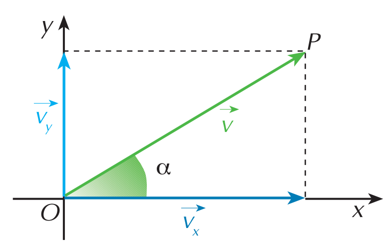
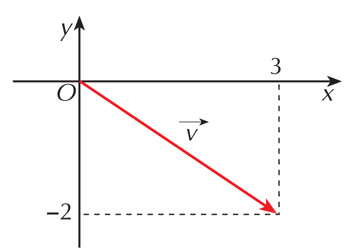


Figura 11



ne positiva dell'asse delle ascisse, fra i moduli v_x e v_y delle componenti cartesiane del vettore $\vec{v}$ e il modulo di $\vec{v}$ stesso sussistono le seguenti relazioni che si possono ricavare dai teoremi sui triangoli rettangoli visti nel precedente capitolo (fai ancora riferimento alla ***figura 10***):

$$v_x = v \cos \alpha \qquad\qquad v_y = v \sin \alpha$$

Inoltre, applicando il teorema di Pitagora si ha che: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Per esempio:

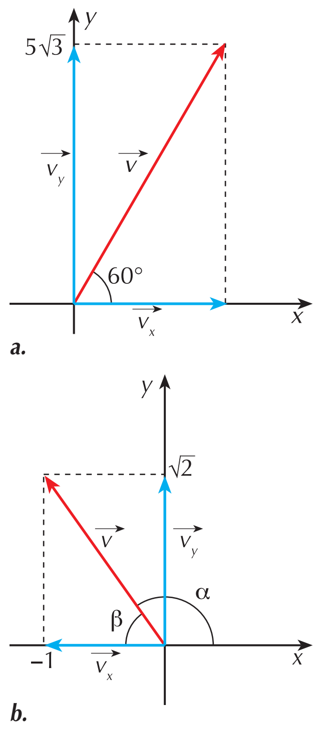
- se il vettore $\vec{v}$ ha modulo 10 e forma un angolo di 60° con la direzione positiva dell'asse x, le sue componenti sono (***figura 12a***):

$$v_x = 10 \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \qquad\qquad v_y = 10 \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

- se $\vec{v}(-1, \sqrt{2})$, allora $v_x = -1$, $v_y = \sqrt{2}$ ed è (***figura 12b***):

$$v = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

Figura 12



Dell'angolo α che il vettore forma con la direzione positiva dell'asse x si può dire che:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{1} = -\sqrt{2}$$

Se cerchiamo con la calcolatrice l'angolo il cui seno è uguale a $\sqrt{\frac{2}{3}}$ troviamo l'angolo $\beta = 54^\circ 44' 8''$; l'angolo α formato dal vettore $\vec{v}$ con la direzione positiva dell'asse x è il suo supplementare, cioè $\alpha = 125^\circ 15' 52''$.
Allo stesso risultato saremmo giunti analizzando il coseno oppure la tangente di α.

Vettori mediante le coordinate degli estremi

Se un vettore $\overrightarrow{AB}$ è dato mediante le coordinate dei suoi estremi (non necessariamente il primo è l'origine), le sue componenti cartesiane sono le misure (con segno) dei cateti orientati del triangolo ACB in ***figura 13a***; allora, se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ sono rispettivamente il primo ed il secondo estremo del vettore $\overrightarrow{AB}$, si ha che:

$$x = x_B - x_A \qquad \text{e} \qquad y = y_B - y_A$$

Per la determinazione del modulo e dell'angolo α che individua la direzione del vettore, valgono le precedenti relazioni.

Per esempio se $A(3, 2)$ e $B(-1, 4)$, allora (***figura 13b***):

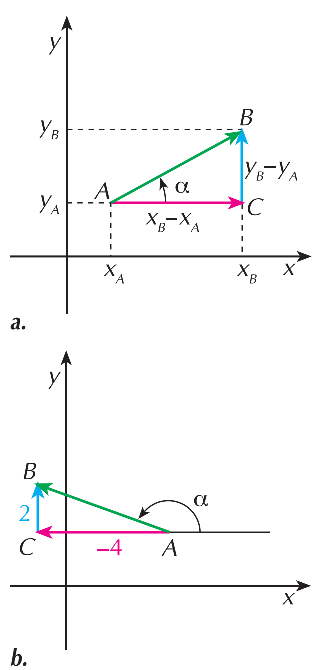
$$x = -1 - 3 = -4 \qquad y = 4 - 2 = 2 \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5};$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{-4}{2\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{2}{-4} = \frac{1}{2},$$

quindi $\alpha = 153^\circ 26' 6''$

Figura 13



ESEMPI

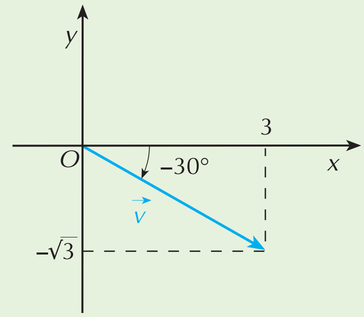
1. Dato il vettore $\vec{v}\left(3, -\sqrt{3}\right)$, calcoliamo il suo modulo e l'angolo che esso forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

Considerando il vettore che ha origine in O, abbiamo che (***figura 14***)

$$v = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\alpha &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos\alpha &= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{cioè} \qquad \alpha = -30°$$

Figura 14



2. Un vettore $\vec{v}$ uscente dall'origine e di modulo 3 forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse un angolo di 120°. Vogliamo determinare le sue componenti cartesiane.

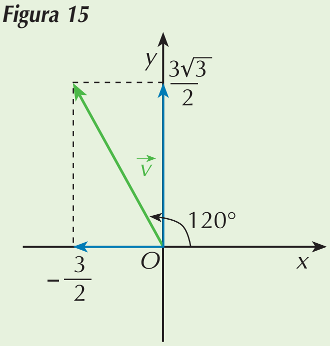
Dalle relazioni della trigonometria ricaviamo subito che (***figura 15***)

$$x = v \cdot \cos 120° = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$y = v \cdot \sin 120° = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Quindi $\vec{v}\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Figura 15



Le operazioni con i vettori nel piano cartesiano

Sommare o sottrarre due vettori diventa molto semplice se questi sono dati mediante le loro componenti cartesiane.

- Con riferimento alla ***figura 16*** a lato, osserviamo che, essendo $OA \cong CB$, perché lati opposti di un parallelogramma, anche le loro proiezioni sugli assi cartesiani sono congruenti; si ha quindi che dati $\vec{r}(r_x, r_y)$ e $\vec{s}(s_x, s_y)$ allora

$$\vec{v} = \vec{r} + \vec{s} = (r_x + s_x,\ r_y + s_y)$$

cioè il vettore somma ha per componenti la somma delle componenti dei due vettori addendi.

- Analogamente per la sottrazione (***figura 17***), tenendo anche conto che sottrarre due vettori significa sommare il primo con l'opposto del secondo, si ha che dati $\vec{r}(r_x, r_y)$ e $\vec{s}(s_x, s_y)$ allora

$$\vec{v} = \vec{r} - \vec{s} = (r_x - s_x,\ r_y - s_y)$$

cioè il vettore differenza ha per componenti la differenza delle componenti dei due vettori dati.

Figura 16

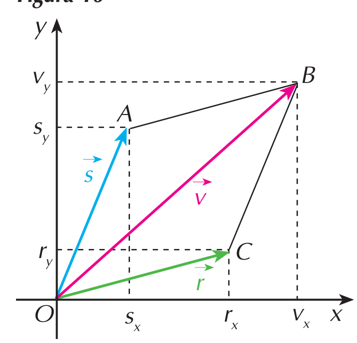
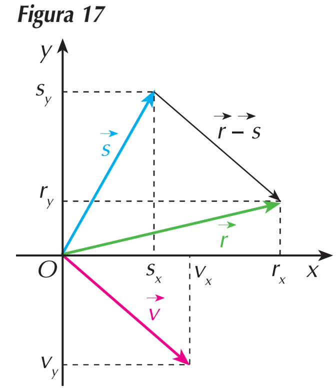


Figura 17



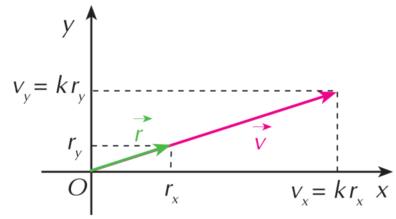
- Per la moltiplicazione con uno scalare (***figura 18***) dati $\vec{r}(r_x, r_y)$ e $k \in R$ allora

$$\vec{v} = k\vec{r} = (kr_x, kr_y)$$

Osserviamo ora che, moltiplicando un vettore $\vec{r}$ per uno scalare, si ottiene un vettore $\vec{v}$ che è parallelo a $\vec{r}$; i due vettori infatti, per come abbiamo definito il prodotto (rivedi il paragrafo 2) hanno la stessa direzione.

Possiamo quindi concludere che **due vettori che hanno le coordinate proporzionali sono paralleli;** viceversa, se i due vettori sono paralleli, le loro coordinate sono proporzionali.

Figura 18



ESEMPI

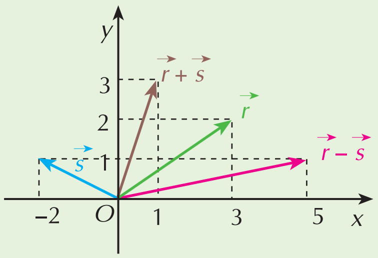
1. Dati i due vettori $\vec{r}(3,2)$ e $\vec{s}(-2,1)$, calcoliamo la loro somma e la loro differenza.

Abbiamo subito (***figura 19***)

$$\vec{r} + \vec{s} = (3-2,\ 2+1) = (1,3)$$

$$\vec{r} - \vec{s} = (3+2,\ 2-1) = (5,1)$$

Figura 19



2. Dati i vettori $\vec{r}(-3,-1)$ e $\vec{s}(2,-4)$ calcoliamo il vettore $\vec{v} = 2\vec{r} - 5\vec{s}$.

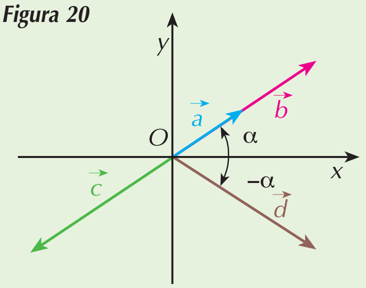
Applichiamo le regole $\quad v_x = 2 \cdot (-3) - 5 \cdot 2 = -16 \qquad v_y = 2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-4) = 18$

Si ha dunque che $\quad \vec{v}(-16, 18)$.

3. Dato il vettore $\vec{a}(3,2)$, ci chiediamo quale sia la sua posizione rispetto ai vettori $\vec{b}(6,4)$, $\vec{c}(-6,-4)$ e $\vec{d}(6,-4)$.

Osserviamo subito che i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno le componenti proporzionali, così come i vettori $\vec{a}$ e $\vec{c}$. Allora i vettori delle prime due coppie sono paralleli ed in particolare i primi due hanno anche lo stesso verso, i secondi due hanno versi opposti (***figura 20***). Inoltre, poiché le componenti dei due vettori nelle due coppie sono, a meno del segno, le une il doppio delle altre, i moduli dei vettori $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sono il doppio del modulo del vettore $\vec{a}$.

Figura 20



I vettori $\vec{a}$ e $\vec{d}$ invece non hanno le componenti proporzionali perché le ascisse hanno come rapporto 2 e le ordinate hanno come rapporto -2. Se indichiamo con α l'angolo formato dal vettore $\vec{a}$ con la direzione positiva dell'asse delle ascisse, allora l'angolo formato dal vettore $\vec{d}$ è $-\alpha$ (riferisciti ancora alla ***figura 20***); anche in questo caso il vettore $\vec{d}$ ha modulo doppio del vettore $\vec{a}$.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Rappresenta nel piano cartesiano i seguenti vettori:

$\vec{r}(5, 1) \qquad \vec{s}(-2, 3) \qquad \vec{v}(-4, -2) \qquad \vec{w}\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

2. Dati i vettori $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{2}, -3\right)$, $\vec{c}(0,5)$, calcola

a. $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ **b.** $-3\vec{a} + \vec{c}$

Calcola poi il modulo dei due vettori risultanti e l'angolo che essi formano con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

3. Stabilisci se i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ di estremi $A(1,2)$ e $B(5,4)$, $C(-1, -1)$ e $D(1,0)$ sono paralleli.

4. Le applicazioni alla fisica

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 21

Il prodotto tra vettori

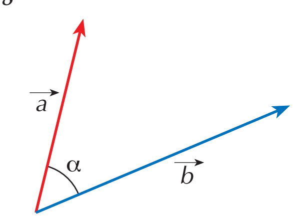
Oltre alle operazioni di addizione e sottrazione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare, in Fisica si definiscono anche due tipi di prodotto tra vettori: il **prodotto scalare**, il cui risultato è uno scalare, e il **prodotto vettoriale**, il cui risultato è un vettore.

Il prodotto scalare

Il **prodotto scalare** di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si indica con il simbolo $\vec{a} \cdot \vec{b}$; esso è uno scalare (quindi un numero) che, indicato con α l'angolo formato dai due vettori, si definisce in questo modo (***figura 21***)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

Figura 21



Per esempio:

- se il modulo di $\vec{a}$ è 4, il modulo di $\vec{b}$ è 6 e i due vettori formano un angolo α di 45°, allora

  $$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 6 \cdot \cos 45° = 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

- se il modulo di $\vec{a}$ è $\frac{1}{2}$, il modulo di $\vec{b}$ è 8 e i due vettori formano un angolo α di 120°, allora

  $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \cos 120° = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

Il prodotto scalare viene usato in Fisica in diverse occasioni, per esempio per il calcolo di un lavoro, come puoi vedere in uno dei problemi successivi.

Il prodotto vettoriale

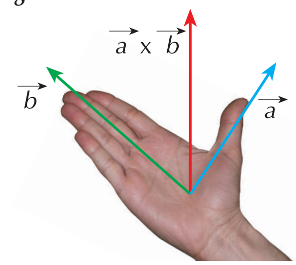
Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e indicato con α l'angolo da essi formato, il loro **prodotto vettoriale** si indica con il simbolo $\vec{a} \times \vec{b}$; esso è un vettore $\vec{c}$ che ha:

- modulo dato dall'espressione $c = ab \sin \alpha$
- direzione perpendicolare al piano definito dai due vettori
- verso stabilito dalla regola della mano destra.

In base a questa regola il verso del vettore risultante si calcola usando le dita della mano destra (osserva la ***figura 22*** di pagina seguente):

- si punta il pollice nella direzione del primo vettore (il vettore $\vec{a}$)
- si puntano le altre dita nella direzione del secondo vettore (il vettore $\vec{b}$)
- il verso del vettore $\vec{c}$ è uscente dal palmo della mano.

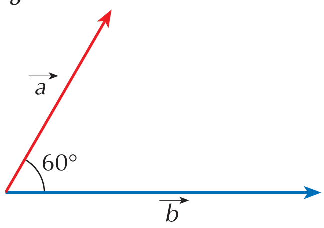
Figura 22



Per esempio, sapendo che i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ appartengono al piano della pagina che stai leggendo e sono orientati come in ***figura 23***, che $\vec{a}$ ha modulo 8, $\vec{b}$ ha modulo 12 e che l'angolo fra i due vettori è di 60°, del prodotto $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ si può dire che:

- ha modulo uguale a: $c = 8 \cdot 12 \cdot \sin 60° = 96 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$
- ha direzione perpendicolare al piano della pagina
- verso entrante nella pagina (il pollice nella direzione di $\vec{a}$, le altre dita nella direzione di $\vec{b}$, la mano è rivolta con il palmo appoggiato alla pagina).

Figura 23



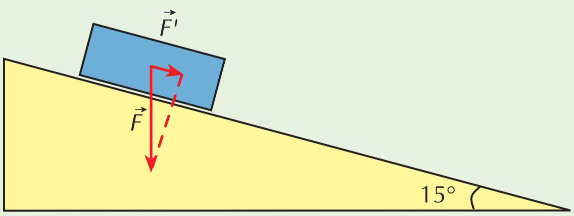
Di seguito vediamo alcuni problemi di Fisica che, per essere risolti, necessitano delle conoscenze sui vettori apprese in questo capitolo.

ESEMPI

1. Un corpo di massa $m = 500$g, soggetto al proprio peso, scivola senza attrito lungo un piano, inclinato di 15° rispetto al suolo. Vogliamo calcolare la componente della forza peso che agisce nella direzione del piano inclinato.

Ricordiamo che la forza peso è $F = mg$, dove g rappresenta l'accelerazione gravitazionale che vale 9,8m/s^2, e che tale forza ha sempre direzione verticale. Per calcolare la sua componente F' nella direzione del piano inclinato ci possiamo riferire al triangolo rettangolo formato dalle due forze F e F' e dalla perpendicolare alla linea del piano stesso; tale triangolo, infatti, ha gli stessi angoli del triangolo che è il modello del piano inclinato (***figura 24***).

Figura 24



Tenendo conto che $F = 0{,}5\text{kg} \cdot 9{,}8\text{m/s}^2$, possiamo quindi scrivere che la misura di F', espressa in Newton, è

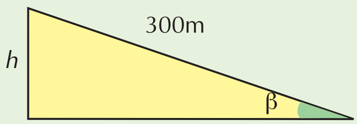
$$F' = F \cdot \sin 15° = (0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot \sin 15°) = 1{,}27$$

2. Un corpo scivola senza attrito lungo un piano inclinato di lunghezza 300m e arriva in fondo con una velocità di $v = 30$m/s. Vogliamo determinare l'inclinazione del piano rispetto a quello orizzontale.

Il modello geometrico del problema è un triangolo rettangolo come quello in ***figura 25*** di cui conosciamo, per il momento, solo l'ipotenusa e di cui vogliamo determinare l'angolo β.

La velocità finale di un corpo che scivola lungo un piano inclinato è data, in assenza di attrito, dalla relazione

Figura 25



$$v = \sqrt{2gh}$$

dove h rappresenta l'altezza del piano e g è l'accelerazione gravitazionale. Poiché $v = 30\text{m/s}$ possiamo scrivere l'equazione

$$30 = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot h} \qquad \text{da cui} \qquad h = 45{,}92(\text{m})$$

Del triangolo rettangolo modello del problema conosciamo ora l'ipotenusa e il cateto opposto all'angolo che vogliamo determinare; usando allora la prima relazione sui triangoli rettangoli otteniamo

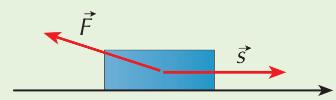
$$\sin\beta = \frac{45{,}92}{300} \qquad \text{da cui} \qquad \beta = 8°48'17''$$

3. Un corpo che si sta muovendo su una traiettoria rettilinea viene fermato in uno spazio di 15m da una forza $\vec{F}$ che forma un angolo di 162° con la direzione dello spostamento. Qual è il modulo di $\vec{F}$ se il lavoro compiuto è di -285J?

Il lavoro L compiuto da una forza costante $\vec{F}$ quando il corpo si sposta di un tratto $\vec{s}$ è dato dal prodotto scalare dei due vettori (***figura 26***)

$$L = \vec{F} \times \vec{s} \qquad \text{cioè} \qquad L = F \cdot s \cos\alpha$$

Figura 26



Sostituendo i valori noti troviamo l'equazione

$$-285 = F \cdot 15 \cdot \cos 162°$$

da cui ricaviamo che $F = -\dfrac{285}{15 \cdot \cos 162°}$ cioè $F = 19{,}98\text{N}$

4. Un vettore $\vec{v}$ di modulo 7 è rivolto verso Nord; un altro vettore $\vec{s}$ di modulo 6 è rivolto verso Est. Calcoliamo il prodotto $\vec{v} \times \vec{s}$.
Come si modificherebbe il risultato se il secondo vettore fosse diretto verso Sud?

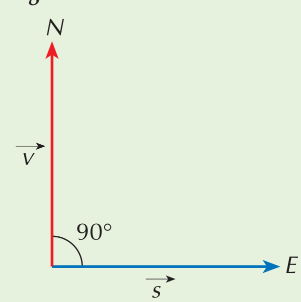
La situazione è rappresentata in ***figura 27a*** dove è evidente che i due vettori formano un angolo di 90°; il modulo del prodotto vettoriale è quindi dato da:

$$7 \cdot 6 \cdot \sin 90° = 42 \cdot 1 = 42$$

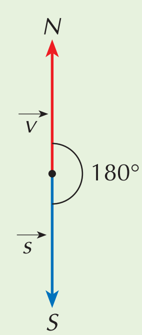
La direzione è perpendicolare al piano della pagina e il verso, applicando la regola della mano destra, è entrante nella pagina.

Se il secondo vettore fosse diretto verso Sud, l'angolo fra i due vettori diventerebbe di 180° (***figura 27b***) e poiché $\sin 180° = 0$, il prodotto vettoriale darebbe vettore nullo.

Figura 27



a.



b.

Soluzioni esercizi verifica di comprensione

pag. 9

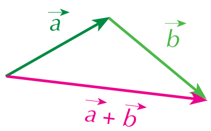
2 **a.** $\sqrt{185}$; $\alpha = 287°6'10''$; **b.** $\sqrt{202}$; $\alpha = 129°17'22''$ **3** sono paralleli

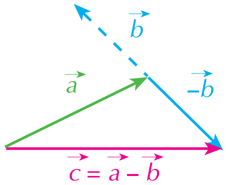
I concetti e le regole

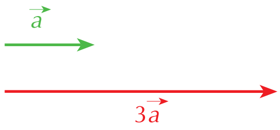
Scalari e vettori

Una grandezza è di tipo **scalare** se si può individuare mediante un numero.
Una grandezza è di tipo **vettoriale** se per individuarla sono necessari una direzione, un verso e un modulo o intensità.
Per eseguire operazioni che coinvolgono quantità scalari si applicano le regole delle operazioni con i numeri.
Per eseguire operazioni con i vettori si seguono regole particolari:

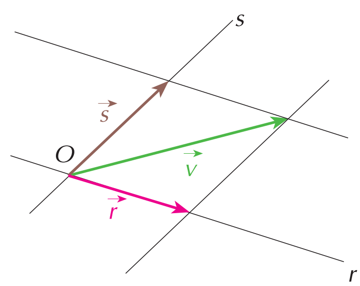
- per **sommare** due vettori si segue la regola punta-coda oppure la regola del parallelogramma
- per **sottrarre** due vettori si somma il primo vettore con l'opposto del secondo
- il **prodotto** un vettore per uno scalare k è il vettore che ha lo stesso verso del vettore dato, stessa direzione se $k > 0$, direzione opposta se $k < 0$, modulo uguale a k volte il modulo del vettore dato.







Di ogni vettore si possono sempre trovare le componenti lungo due direzioni particolari tracciando dalla sua punta le parallele alle direzioni.



I vettori nel piano cartesiano

Ogni vettore $\vec{v}$ si può rappresentare in un piano cartesiano mediante le coordinate dei suoi punti estremi; in particolare, è spesso conveniente raffigurarlo con il primo estremo nell'origine.
In tal caso, indicate con v_x e v_y le sue componenti lungo gli assi cartesiani, con v il suo modulo e con α l'angolo che la sua direzione forma con il semiasse positivo delle ascisse si ha che:

$$v_x = v \cos \alpha \qquad v_y = v \sin \alpha \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Se un vettore è dato mediante le sue componenti lungo gli assi cartesiani, la somma, la differenza e il prodotto per uno scalare si determinano con le seguenti regole:

$$\vec{r} + \vec{s} = (r_x + s_x,\ r_y + s_y) \qquad \vec{r} - \vec{s} = (r_x - s_x,\ r_y - s_y) \qquad k\vec{r} = (kr_x,\ kr_y)$$

Il prodotto scalare e il prodotto vettoriale

In Fisica si usano due particolari tipi di prodotto fra vettori che sono così definiti:

- il **prodotto scalare** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è lo scalare che si ottiene moltiplicando i moduli dei due vettori e il coseno dell'angolo α da essi formato: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$
- il **prodotto vettoriale** $\vec{a} \times \vec{b}$ è il vettore che ha modulo $ab \sin \alpha$, direzione perpendicolare al piano definito da $\vec{a}$ e $\vec{b}$, verso definito dalla regola della mano destra.