Concetti chiave e regole

I sistemi

Un'equazione in due o più variabili, se non è impossibile, ammette sempre infinite soluzioni; se di due o più equazioni in due o più incognite si vogliono trovare le soluzioni comuni si deve risolvere il **sistema** delle loro equazioni. Scrivere un sistema di equazioni significa quindi richiedere che tutte le equazioni siano verificate per gli stessi valori delle variabili.
Il **grado** di un sistema è il prodotto dei gradi delle sue equazioni; in particolare un sistema è di primo grado se tutte le sue equazioni sono di primo grado.
Un sistema può essere:

- determinato se ha un numero finito di soluzioni
- indeterminato se ha infinite soluzioni
- impossibile se non ha soluzioni.

I principi di equivalenza

Due sistemi sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.
Come nel caso delle equazioni, per risolvere un sistema, supponiamo di due equazioni in due incognite, si deve passare da una forma ad un'altra ad essa equivalente fino ad arrivare a una del tipo $\begin{cases} x = k \\ y = h \end{cases}$; in questo caso la soluzione del sistema è la coppia ordinata (k, h).

I principi di equivalenza che valgono per un sistema di equazioni sono i seguenti.

- **Principio di sostituzione.** Se in un sistema si sostituisce ad una incognita la sua espressione ricavata da un'altra equazione, si ottiene un sistema equivalente a quello dato.
- **Principio di riduzione.** Se in un sistema si sommano membro a membro le sue equazioni (tutte o alcune) e si sostituisce l'equazione ottenuta ad una di esse, si ottiene un sistema equivalente a quello dato.

I sistemi lineari

Un sistema è lineare se è di primo grado. Se è composto da due equazioni in due incognite x e y la sua forma normale è la seguente

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

I metodi per la risoluzione di un sistema si basano sui principi di equivalenza e sono i seguenti:

- il **metodo di sostituzione**, che consiste nel ricavare l'espressione di una variabile da una delle equazioni e sostituire tale espressione nelle altre
- il **metodo di riduzione**, che consiste nel sostituire ad una delle equazioni quella che si ottiene sommando membro a membro l'equazione stessa con un'altra (dopo averle eventualmente moltiplicate per un opportuno fattore non nullo), in modo da eliminare una delle variabili
- il **metodo del confronto**, che consiste nel ricavare l'espressione della stessa variabile da due equazioni e nel confrontare le espressioni ottenute.

Le matrici e i determinanti

Una tabella di numeri della forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ si chiama **matrice** e poiché ha due righe e due colonne si dice che è una matrice quadrata di ordine due. Ad ogni matrice di questo tipo si può associare un numero, chiamato **determinante**, che si calcola in questo modo:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Il metodo di Cramer

Per risolvere un sistema lineare, oltre ai precedenti metodi, si può usare uno schema di risoluzione che prende il nome di **metodo di Cramer**. Relativamente ai sistemi lineari di due equazioni in due incognite scritti in forma normale, si devono calcolare i seguenti determinanti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - bf \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$$

e si verifica che:

- se $\Delta \neq 0$ il sistema è determinato con soluzione $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} \\ \\ y = \dfrac{\Delta x}{\Delta} \end{cases}$
- se $\Delta = 0$ e $\Delta x = \Delta y = 0$ il sistema è indeterminato
- se $\Delta = 0$ e $\Delta x \neq 0$ oppure $\Delta y \neq 0$ il sistema è impossibile.