AREA 2: IL CALCOLO DIFFERENZIALE

1

DERIVATA E DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

Per ricordare

★ Il **rapporto incrementale** della funzione $f(x)$ relativo al punto x_0 e all'incremento h è dato dall'espressione:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Calcolando il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale si ottiene la **derivata** della funzione $f(x)$ nel punto x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se questo limite esiste finito, si dice che $f(x)$ è derivabile in x_0; quando il limite non è finito oppure non esiste, si dice che $f(x)$ non è derivabile in x_0.
Una funzione non derivabile può però essere derivabile da sinistra o da destra a seconda che esista finito il limite per $h \to 0^-$ oppure per $h \to 0^+$ del rapporto incrementale.
Si dimostra poi che se una funzione è derivabile in un punto x_0, allora è anche continua in x_0; la continuità non è invece garanzia di derivabilità: esistono funzioni continue in un punto che non sono derivabili in tale punto.

★ Per calcolare la derivata di una funzione si devono conoscere le regole di derivazione delle funzioni elementari:

$D[k] = 0$ $\qquad$ $D[x^\alpha] = \alpha x^{\alpha - 1}$ $\qquad$ $D[\sin x] = \cos x$

$D[\cos x] = -\sin x$ $\qquad$ $D[\ln x] = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $D[e^x] = e^x$

e i seguenti teoremi:

- derivata della somma: $D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
- derivata del prodotto: $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

  in particolare $D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$ con $k \in R$
- derivata del quoziente: $D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

  in particolare $D\left[\dfrac{1}{g(x)}\right] = -\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

- derivata della funzione composta: $D[g(f(x))] = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

In particolare se $y = [f(x)]^{g(x)}$ allora $y' = [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)} \right]$

Dalla regola di derivazione delle funzioni inverse si ha poi che:

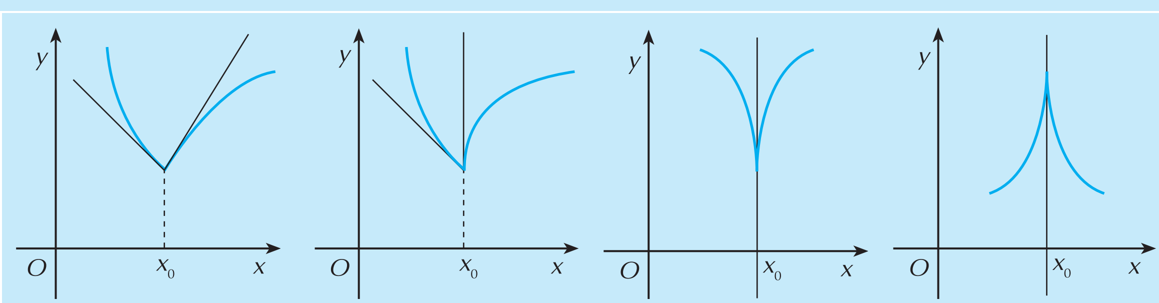
- $D[\arcsin x] = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad D[\arccos x] = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D[\arctan x] = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad D[\text{arccotan}\, x] = -\dfrac{1}{1+x^2}$

★ Dal punto di vista geometrico $f'(x_0)$, cioè la derivata calcolata nel punto x_0, rappresenta il coefficiente angolare della retta t tangente alla curva in quel punto. Se la funzione è derivabile, l'equazione della retta tangente in $P(x_0, f(x_0))$ è quindi:

$$y - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{m} \cdot (x - x_0)$$

Quando la funzione non è derivabile, si possono presentare i seguenti casi particolari:

- $f'(x_0) \to \infty$ allora la retta tangente è parallela all'asse y
- la derivata sinistra e quella destra sono finite ma sono diverse, oppure una di esse è finita e l'altra infinita: allora a sinistra del punto P vi è una tangente e a destra ce n'è un'altra e si dice che P è un **punto angoloso**
- la derivata sinistra e quella destra sono infinite di segno opposto: allora la tangente in P è parallela all'asse y e si dice che P è una **cuspide**.

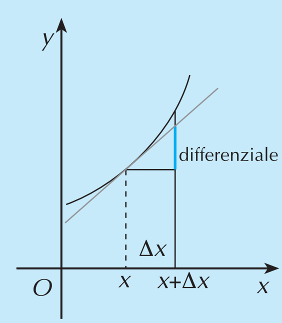


punto angoloso — punto angoloso — cuspide — cuspide

★ Il **differenziale** di una funzione $f(x)$ in un punto x è il prodotto della derivata della funzione per l'incremento Δx :

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x \quad \text{ed essendo } \Delta x = dx \quad df(x) = f'(x) \cdot dx$$

Dal punto di vista geometrico il differenziale rappresenta l'incremento della variabile dipendente y calcolato sulla retta tangente anzichè sulla funzione.



ESERCIZI

SULLE DERIVATE

Calcola le derivate delle seguenti funzioni.

1 $y = \dfrac{\ln x}{x^2} + x$ $\qquad y = x \sin x \tan x$ $\qquad \left[\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^3}\ln x + 1;\ \dfrac{\sin x(x\cos^2 x + \sin x \cos x + x)}{\cos^2 x}\right]$

2 $y = \dfrac{\tan x + \sin x}{\tan x - \sin x}$ $\qquad y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{(x^2 - x)^2}$ $\qquad \left[\dfrac{-2\sin x}{(\cos x - 1)^2};\ \dfrac{(3x^2 - 8x + 3)\sqrt{x^2 - 2x}}{x^3(x - 2)(1 - x)^3}\right]$

3 $y = \dfrac{5x + 2}{(x^2 + 1)^2}$ $\qquad y = \dfrac{\ln x - x}{(x + \ln x)^2}$ $\qquad \left[\dfrac{5 - 15x^2 - 8x}{(x^2 + 1)^3};\ \dfrac{x^2 + 3x - \ln x - 3x\ln x}{x(x + \ln x)^3}\right]$

4 $y = \ln\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2 + 1}$ $\qquad y = \dfrac{\sqrt{x^3 + 4}}{(x + 1)^2}$ $\qquad \left[\dfrac{x}{x^2 + 4};\ -\dfrac{x^3 - 3x^2 + 16}{2(x + 1)^3\sqrt{x^3 + 4}}\right]$

5 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x + 1}$ $\qquad y = \dfrac{2 - x^2}{(1 + \ln x)^3}$ $\qquad \left[\dfrac{\ln x - 1}{2\sqrt{x}(\ln x + 1)^2};\ -\dfrac{2x^2\ln x - x^2 + 6}{x(\ln x + 1)^4}\right]$

6 $y = \dfrac{2x\, e^x}{2 + x}$ $\qquad y = \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{\sqrt{x} + 3}$ $\qquad \left[\dfrac{2e^x(x^2 + 2x + 2)}{(x + 2)^2};\ \dfrac{3\ln x + 2\sqrt{x} + 6}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)^2}\right]$

7 $y = \sin\dfrac{x}{x + 1}$ $\qquad y = \sqrt{\cos(\ln\sqrt{x})}$ $\qquad \left[\dfrac{1}{(x + 1)^2}\cdot\cos\dfrac{x}{x + 1};\ \dfrac{-\sin(\ln\sqrt{x})}{4x\sqrt{\cos(\ln\sqrt{x})}}\right]$

8 $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{(3x - 1)^2}$ $\qquad y = \ln\dfrac{x^2}{(4x + 3)^2}$ $\qquad \left[\dfrac{3x^2 + x + 6}{(1 - 3x)^3\sqrt{x^2 + 1}};\ \dfrac{6}{4x^2 + 3x}\right]$

9 $y = x^4\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}$ $\qquad y = \dfrac{(2x - 1)^2}{\sqrt[3]{4 - x^2}}$ $\qquad \left[\dfrac{4x^3(4x^2 + 3)}{3\sqrt[3]{x^2 + 1}};\ \dfrac{2(4x^2 + x - 24)(2x - 1)}{3(x^2 - 4)\sqrt[3]{4 - x^2}}\right]$

10 $y = \dfrac{\sin 3x + \cos 3x}{\sin 6x}$ $\qquad y = x^{\sqrt{2}}e^{\sin x}$ $\qquad \left[\dfrac{6(\sin^3 3x - \cos^3 3x)}{\sin^2 6x};\ \dfrac{x^{\sqrt{2}}e^{\sin x}(x\cos x + \sqrt{2})}{x}\right]$

11 $y = \ln\sin\sqrt{x^2 + 1}$ $\qquad y = \ln\sqrt{\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}}$ $\qquad \left[\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}\tan\sqrt{x^2 + 1}};\ \dfrac{1}{1 - 2\cos^2 x}\right]$

12 $y = e^{\log\sin x} + \ln\dfrac{x}{2}$ $\qquad y = \dfrac{2x^2 - 1}{2x^2} + \ln\sqrt{1 + x^2}$ $\qquad \left[\dfrac{x\cos x + 1}{x};\ \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^3(x^2 + 1)}\right]$

13 $y = \arcsin\dfrac{\sqrt{1 - \cos x}}{3}$ $\qquad y = \arctan\dfrac{1 - x}{1 + x} + \arctan x$ $\qquad \left[\dfrac{\sin x}{2\sqrt{8 - 7\cos x - \cos^2 x}};\ 0\right]$

14 $y = \ln\arctan\dfrac{x - 1}{x + 1}$ $\qquad y = \sqrt{1 - x^2}\arcsin x + \dfrac{1}{2}\ln(1 - x^2)$

$$\left[\dfrac{1}{(x^2 + 1)\arctan\dfrac{x - 1}{x + 1}};\ \dfrac{x}{x^2 - 1} - \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + 1\right]$$

15 $y = \arctan \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad$ $y = \ln \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} + \arctan \sqrt{x}$

$\left[\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}(5x^2+1)};\ \dfrac{x+3}{2\sqrt{x}(1-x^2)}\right]$

16 $y = \sqrt{2+x-x^2} - 2 \arcsin \dfrac{1-2x}{3}$ $\qquad$ $y = \ln \dfrac{x^2-4x+6}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \arctan \dfrac{x-2}{\sqrt{2}}$

$\left[\dfrac{5-2x}{2\sqrt{2+x-x^2}};\ \dfrac{2x-3}{x^2-4x+6}\right]$

17 $y = \arctan \dfrac{3}{x^2} + \ln \sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+3}}$ $\qquad$ $y = \arcsin \dfrac{\sqrt{x}}{x-1} + \arccos \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ $\qquad$ $\left[\dfrac{108x}{x^8-81};\ 0\right]$

18 $y = x^{\sin x}$
(Suggerimento: puoi riscrivere la funzione usando l'uguaglianza
$f(x)^{g(x)} = e^{\ln\left[f(x)^{g(x)}\right]} = e^{g(x)\ln f(x)}$, cioè $y = e^{\sin x \ln x}$) $\qquad$ $\left[\dfrac{x^{\sin x}}{x}(\sin x + x \ln x \cos x)\right]$

19 $y = (x+1)^{x^2}$ $\qquad$ $y = (3x^2-1)^{x+1}$

$\left[(x+1)^{x^2-1}\left[2x(x+1)\ln(x+1)+x^2\right];\ (3x^2-1)^x\left[6x(x+1)+(3x^2-1)\ln(3x^2-1)\right]\right]$

20 $y = x^{\ln x - 1}$ $\qquad$ $y = x^{x^2 - \ln x}$

$\left[x^{\ln x-2}(2\ln x - 1);\ x^{x^2-\ln x-1}\left[2(x^2-1)\ln x + x^2\right]\right]$

Considerate le funzioni $f(x)$ indicate, risolvi le equazioni e disequazioni indicate a fianco di ciascuna di esse.

21 $y = \dfrac{x+1}{x}$ $\qquad$ $f(1) - xf'(1) = f(-1)$ $\qquad$ $[x = -2]$

22 $y = \dfrac{\sin x}{\cos x - 2}$ $\quad [-\pi, \pi]$ $\qquad$ $\sin x \cdot f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \cos x \cdot f'(\pi) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\left[x = -\dfrac{\pi}{2} \vee x = -\dfrac{\pi}{6}\right]$

23 $y = \ln \dfrac{x-1}{x}$ $\qquad$ $(x-1)f'(x) - e^{f(x)} = 3$ $\qquad$ $\left[x = \dfrac{1}{2}\right]$

24 $y = xe^x$ $\qquad$ $2e^{1-x} \cdot f(x) + f'(1) > f(2)$ $\qquad$ $[x > e - 1]$

25 $y = \arctan \dfrac{x+1}{x}$ $\qquad$ $-(3x^2-1)f'(x) - f''(x) < \dfrac{6x^3(1+x)}{(2x^2+2x+1)^2}$

$\left[-2\sqrt{3}+3 < x < 2\sqrt{3}+3\right]$

26 $y = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$ $\qquad$ $\dfrac{f'(x)}{f(x)} > \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $\left[x < -2\sqrt{2} \vee -2 < x < 0 \vee 2 < x < 2\sqrt{2}\right]$

27 $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad$ $f'(x) + \dfrac{x \cdot f(x)}{1+x^2} < 0$ $\qquad$ $[x < 0]$

28 $y = x + \arctan x$ $\qquad$ $x \cdot f'(x) + f''(x) < x^3$ $\qquad$ $[-1 < x < 0 \vee x > 1]$

SULLA CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

Studia la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni classificando i punti di non derivabilità.

29 $y = |x^3 - 2x^2 + x|$ $[x = 0 \text{ punto angoloso}]$

30 $y = |x^3 - 3x|$ $[x = 0,\ x = \pm\sqrt{3} \text{ punti angolosi}]$

31 $y = |\sin x|$ $[x = 0 + k\pi \text{ punti angolosi}]$

32 $y = \dfrac{x^2 + |x|}{x - 3}$ $[x = 3 \text{ disc. seconda specie; } x = 0 \text{ punto angoloso}]$

33 $y = \begin{cases} x + 2 & x \le 0 \\ 3x & 0 < x < 1 \\ 4x^2 - 1 & x \ge 1 \end{cases}$ $[x = 0 \text{ disc. prima specie; } x = 1 \text{ punto angoloso}]$

34 $y = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} & |x| > 3 \\ \sqrt{|x - 3|} & |x| \le 3 \end{cases}$ $[x = -3 \text{ discontinuità prima specie; } x = 3 \text{ cuspide}]$

35 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & x \le 2 \\ \dfrac{b}{3x - 8} & x > 2 \end{cases}$, determina i valori dei parametri reali a e b per i quali sono continue la funzione f e la sua derivata prima. $[a = -2,\ b = 8]$

36 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 5 & -1 \le x \le 1 \\ -x^2 + ax + b & 1 < x \le 4 \end{cases}$, determina i valori dei parametri reali a e b per i quali la f è continua e derivabile. $[a = 7,\ b = -7]$

37 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & x < 0 \\ bx - 2c & 0 \le x \le 3 \\ -\dfrac{d}{x} & x > 3 \end{cases}$, determina i valori dei parametri reali a, b, c, d in modo che la funzione sia continua in $x = 0$ e in $x = 3$ e derivabile in $x = 0$. Esistono dei valori dei parametri per i quali la funzione è derivabile anche in $x = 3$? $[\forall a \in R,\ b = 0 \ \wedge\ c = 1 \ \wedge\ d = 6]$

38 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} \ln(ax^2 + bx + 1) & x \ge 0 \\ \arctan x + c & x < 0 \end{cases}$, determina i valori dei parametri reali a, b, c, affinché la funzione sia derivabile nell'origine. $[\forall a \in R,\ c = 0,\ b = 1]$

39 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} \cos x + \sin x & x \le \pi \\ ax^2 + bx + c & x > \pi \end{cases}$, stabilisci per quali valori reali dei parametri a, b, c la funzione è continua e derivabile due volte in $x = \pi$. $\left[a = \dfrac{1}{2},\ b = -1 - \pi,\ c = \dfrac{\pi^2 + 2\pi - 2}{2}\right]$

40 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} 2e^x \cos x + a \sin x & x \le 0 \\ 3b & x > 0 \end{cases}$, stabilisci se esistono valori dei parametri reali a e b per i quali la f risulta continua e derivabile in R. $\left[a = -2,\ b = \dfrac{2}{3}\right]$

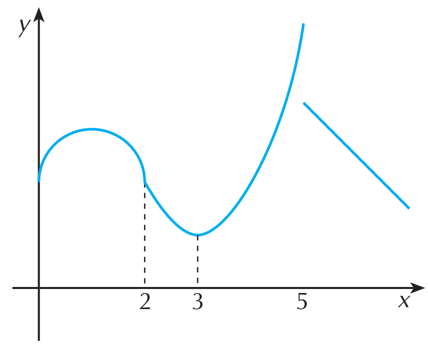
41 Determina il più vasto insieme numerico in cui la funzione $f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx & x < 0 \\ a \sin x - c & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{x} + b & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

è continua e derivabile e per quali valori dei parametri reali a, b, c lo è.

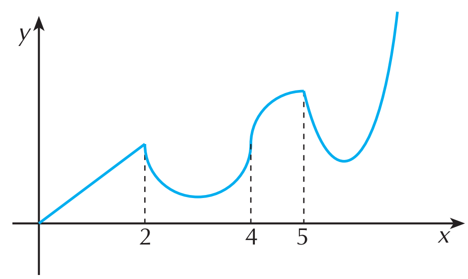
$\left[R - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\};\ a = \frac{1}{\pi},\ b = -\frac{1}{\pi},\ c = 0 \right]$

Descrivi la derivabilità delle seguenti funzioni $f(x)$ di cui è dato il grafico.

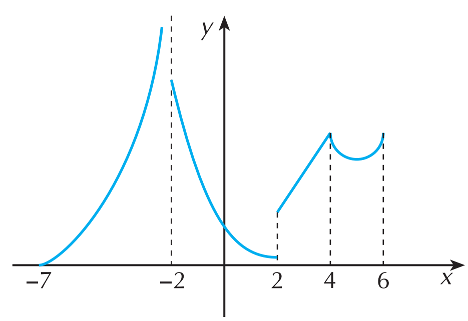
42 Il grafico è così costituito:
- una semicirconferenza per $0 \leq x < 2$
- un arco di parabola per $2 \leq x \leq 5$
- una semiretta per $x > 5$.



43 Il grafico è così costituito:
- una retta per $0 \leq x < 2$
- una semicirconferenza per $2 \leq x < 4$
- un arco di circonferenza (un quadrante) per $4 \leq x < 5$
- un arco di parabola per $x \geq 5$.



44 Il grafico è così costituito:
- un arco di iperbole equilatera per $-7 \leq x < -2$
- un arco di curva esponenziale $-2 \leq x < 2$
- un segmento di retta per $2 \leq x < 4$
- una semicirconferenza per $4 \leq x \leq 6$.



PROBLEMI

45 Scrivi l'equazione della retta tangente alla funzione di equazione $y = \sqrt{\frac{9x^2 - 1}{x}}$ nel suo punto P di ascissa 1.

$\left[y = \frac{5\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4} \right]$

46 Scrivi l'equazione delle rette tangenti alla funzione di equazione $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x - 1$ che sono parallele alla retta $y = -x + 3$.

$\left[y = -x - \frac{11}{6};\ y = -x - \frac{5}{3} \right]$

47 Determina le ascisse dei punti della curva di equazione $y = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + 5x + 3$ nei quali la retta tangente ha coefficiente angolare uguale a 2. $\left[\pm 1, \frac{3}{2}\right]$

48 Calcola le coordinate dei punti della funzione $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 1}$ nei quali la retta tangente è perpendicolare alla retta di equazione $3x + 6y + 1 = 0$. $[(0, 1), (1, 0)]$

49 Determina le coordinate dei punti nei quali la tangente alla curva di equazione $y = \frac{x-2}{x+7}$ forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse delle ascisse. $[(-4, -2), (-10, 4)]$

50 Quali sono i punti della funzione di equazione $y = \ln(x^3 - 6x)$ in cui la tangente al grafico è parallela all'asse x? $\left[\left(-\sqrt{2}, \frac{5\ln 2}{2}\right)\right]$

51 Trova l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \sqrt{2x - 1} - 2$ nel suo punto d'intersezione con l'asse x. $\left[y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right]$

52 Trova le coordinate dei punti in cui il grafico della funzione $f(x) = \ln\left(x^2 - 3\right)$ ha le tangenti parallele alla retta di equazione $x - y + 3 = 0$ e determina le loro equazioni. $[A(3, \ln 6);\ x - y - 3 + \ln 6 = 0]$

53 Data la parabola di equazione $y = 2x^2 + ax - 1$, determina il coefficiente a in modo che l'equazione della retta ad essa tangente nel suo punto di ascissa 0 passi anche per il punto di coordinate $(-2, 3)$. $[y = 2x^2 - 2x - 1]$

54 Determina i coefficienti a e b della curva di equazione $y = \frac{ax + b}{x^2}$ in modo che essa abbia come normale nel punto di coordinate $(-1, 2)$ la retta di equazione $y = -\frac{3}{7}x + \frac{11}{7}$. $\left[a = -\frac{5}{3},\ b = \frac{1}{3}\right]$

55 Dopo aver determinato il punto P di intersezione delle curve C_1 di equazione $y = x^3 - 2x + 1$ e C_2 di equazione $y = 3x^3 + x^2 + 4$, determina la normale a C_2 in P e le ascisse dei punti in cui la tangente a C_1 è inclinata di 45° rispetto alla direzione positiva dell'asse delle ascisse. $[x + 7y - 13 = 0;\ x = \pm 1]$

56 Trova i coefficienti della curva di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ in modo che il suo grafico passi per i punti di coordinate $(0, 2)$ e $(1, 1)$, e nel punto di ascissa -2 abbia come retta tangente quella di equazione $y = -3x - 6$. $\left[y = -\frac{8}{9}x^3 - \frac{14}{9}x^2 + \frac{13}{9}x + 2\right]$

57 Considerata la funzione $f(x) = 2x^2 + \ln(2x + 1)$ determina le coordinate dei punti in cui si annulla la derivata seconda e calcola poi le equazioni delle rette tangenti alla f in tali punti. $[(0, 0);\ y = 2x]$

58 Data la funzione $f(x) = \frac{ax^3 - 1}{x^2 + b}$, determina i valori dei parametri reali a e b in modo che il grafico di f passi per il punto $A(1, 3)$ e che in tale punto la retta tangente sia parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. $\left[a = \frac{17}{8},\ b = -\frac{5}{8}\right]$

59 Considerata la funzione $f(x) = \log_5 x - 2$, siano A il punto della curva di ascissa 5 e B il punto di ordinata -3. Determina l'ascissa di un punto P sull'arco AB in modo che la tangente in P alla f sia parallela alla corda AB. $\left[x_P = \frac{12}{5\ln 5}\right]$

60 Determina i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola corrispondente abbia vertice di ascissa $\frac{5}{2}$ e sia tangente alla retta di equazione $y + 5x - 2 = 0$ nel punto B di ascissa 0. Scrivi poi l'equazione della normale in B alla curva. $[y = x^2 - 5x + 2;\ x - 5y + 10 = 0]$

61 Dimostra che se una funzione $f(x)$ è pari, allora la sua derivata è dispari e, reciprocamente, se $f(x)$ è dispari la sua derivata è pari.

62 Considerata la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+a}{1-x} & -2 \le x \le 0 \\ x^2 + bx - 3 & 0 < x \le 4 \end{cases}$ determina per quali valori dei parametri reali a e b essa è continua e derivabile; scrivi poi l'equazione della retta tangente a $f(x)$ nel punto $x = 0$. $[a = -3,\ b = -1,\ y = -x - 3]$

63 Date le funzioni $f(x) = a \ln(2 + x^2)$ e $g(x) = ax^2 + b$, stabilisci, al variare di $a, b \in R$, l'esistenza di punti che ammettono la stessa retta tangente e trova l'equazione di tali rette. $[\forall a \in R : b = a \ln 2;\ y = a \ln 2]$

64 Determina il valore del parametro reale k per il quale le curve di equazioni $y = 3x^2 + 2kx$ e $y = -4x^4 + 3kx^2 + 3x$ sono tangenti nell'origine del sistema di riferimento e trova poi l'equazione della retta tangente comune. $\left[k = \frac{3}{2};\ y = 3x\right]$

65 Date le funzioni $f(x) = \ln(x - 3)$ e $g(x) = \dfrac{x-6}{x-2}$ determina del coordinate dei punti di uguale ascissa in cui i rispettivi grafici hanno tangenti parallele; trova poi le equazioni di tali tangenti. $[A(4, 0),\ B(4, -1);\ y = x - 4,\ y = x - 5]$

66 Considerata la curva di equazione $y = a \tan x + b$, determina per quali valori dei parametri reali a e b essa ha nel punto $P\left(\frac{\pi}{3}, 2\sqrt{3} + 1\right)$ tangente parallela alla retta $8x - y = 0$. Costruisci poi il grafico della curva ottenuta. $[a = 2,\ b = 1]$

67 Calcola per quale valore del parametro a le curve di equazioni $y = -ax^3 + 2x + a$ e $y = ax^2 + \frac{8}{5}$ sono tangenti nel punto di ascissa 1 e trova poi l'equazione della tangente comune. $\left[a = \frac{2}{5};\ 4x - 5y + 6 = 0\right]$

68 Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ e $g(x) = x^2 + ax + b$, stabilisci per quali valori di $a, b \in R$ le funzioni f e g hanno la stessa retta tangente nel punto di ascissa 2. $[a = -2,\ b = 1]$

69 Stabilisci in quale punto dell'intervallo $[0, a]$ la curva di equazione $y = x^n$ ha la tangente parallela alla corda AB, essendo A il punto di ascissa 0 e B quello di ascissa a. $\left[x = \frac{a}{\sqrt[n-1]{n}}\right]$

70 Data la funzione $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, calcola l'equazione della retta ad essa tangente nel suo punto di ascissa 1. La funzione è continua e derivabile nell'origine?
$[y = (2\ln 2 - 1)(x - 1) + 2$, in $x = 0$ discontinuità eliminabile e $f(x)$ non derivabile$]$

71 Determina per quali valori dei parametri reali a, b, c, la funzione $y = ax^2 + 2bx + c$ e le sue derivate successive soddisfano la relazione $y + 2y' - y'' = 4x^2 + 2x - 30$ per ogni valore reale della variabile x. $[a = 4 \ \wedge\ b = -7 \ \wedge\ c = 6]$

72 Determina per quali valori dei parametri reali a e b la funzione di equazione $y = e^{ax} - 2bx + a$ soddisfa le seguenti condizioni:

a. $2y'(0) - \frac{2}{3}y''(0) = 4$

b. $y(0) = 0.$ $\left[a = -1,\ b = -\frac{5}{3}\right]$

73 Sono date le due funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{2x}$. Verifica che entrambe soddisfano l'equazione $A: y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$. Mostra poi che anche la funzione $h(x) = a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$, soddisfa la A $\forall a, b \in R$.

74 Determina per quale valore del parametro reale a la funzione $f(x) = a \sin x$ soddisfa l'equazione $A: y'' - 3y = 4\sin x$.
Mostra poi che anche le funzioni $g(x) = e^{\sqrt{3}x} - \sin x$ e $h(x) = e^{-\sqrt{3}x} - \sin x$ sono soluzioni della stessa equazione e stabilisci, motivando adeguatamente la risposta, se lo sono anche le funzioni che hanno le seguenti equazioni:

a. $y = ae^{\sqrt{3}x} + be^{-\sqrt{3}x} - \sin x$

b. $y = a \cdot g(x) + b \cdot h(x)$

dove a e b sono parametri reali. [$a = -1$; **a.** $\forall a, b \in R$; **b.** $a + b = 1$]

75 Data la funzione $f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 3}$, determina l'ascissa (positiva) del punto Q nel quale la retta tangente alla f è parallela alla retta di equazione $25y - 13x + 1 = 0$; trova poi le coordinate del punto P di f per il quale la retta PO è perpendicolare a QO. $\left[Q\left(2,\ \frac{2}{5}\right);\ P\left(-\frac{7}{3},\ \frac{35}{3}\right)\right]$

76 Dopo aver tracciato il grafico della funzione di equazione $y = \sqrt{x^2 - (x + |x|) + 1}$, deduci la presenza di punti di discontinuità e/o di non derivabilità.
[continua in R; punti angolosi in $x = 1$ e $x = 0$]

77 Considerata la funzione $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x + 2}$, determina i valori dei parametri reali a e b in modo che il suo grafico risulti tangente nel punto $P(1, -1)$ alla parabola avente vertice in $V(3, 1)$.
$\left[a = \frac{5}{2},\ b = -\frac{11}{2}\right]$

78 Una circonferenza ha centro in un punto C di ascissa 2 ed è tangente alla curva di equazione $y = 3x^2 - 2\ln x$ nel punto di ascissa 1. Trova l'equazione della circonferenza e della tangente comune. [$2x^2 + 2y^2 - 8x - 11y + 21 = 0$; $y = 4x - 1$]

79 Data la funzione $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$ trova, se esistono, le coordinate dei punti P di f nei quali la retta tangente passa per il punto $A(0, -1)$; se tali punti esistono, trova le equazioni delle rette tangenti.
(Suggerimento: considerato il punto P di f di ascissa k, scrivi l'equazione della retta tangente in P e imponi che passi per il punto A)
$\left[P\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{11}{2}\right),\ y = 9x - 1;\ \text{l'altra retta tangente è l'asintoto obliquo } y = x - 1\right]$

80 Considerata la funzione $f(x) = \ln x + x$, stabilisci se essa ammette punti nei quali:

a. la retta tangente passa per l'origine degli assi

b. la retta tangente è inclinata di $\frac{\pi}{4}$ rispetto alla direzione positiva dell'asse x

c. la retta tangente è parallela all'asse x.

In caso affermativo, determina le coordinate di tali punti.
[**a.** $(e,\ 1 + e)$; **b.** non esistono punti; **c.** non esistono punti]

81 L'equazione oraria di un moto rettilineo è $s = 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$; determina la velocità e l'accelerazione dopo $\frac{2}{3}\pi$ secondi dall'inizio del moto. $\left[v = \frac{3}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\text{m/s};\ a = 3\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\text{m/s}^2\right]$

82 Due punti materiali si muovono sulla stessa retta con equazioni orarie $s_1 = 3t^2 - 2t$ e $s_2 = 3 + \frac{1}{2}t + t^2$; calcola le loro velocità e le loro accelerazioni nel momento in cui si incontrano.
$[v_1 = 10\text{m/s};\ a_1 = 6\text{m/s}^2;\ v_2 = 4,5\text{m/s};\ a_2 = 2\text{m/s}^2]$

83 In un moto parabolico la traiettoria ha equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6x$; nel punto A di ascissa 2 la componente della velocità lungo l'asse x è di 3m/s. Calcola la componente verticale e il valore della velocità tangenziale. $\left[v_y = 12\text{m/s};\ v = \sqrt{153}\text{m/s}\right]$

84 Un punto materiale P descrive una curva che ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ con $t > 0$ ed espresso in secondi e x e y espressi in metri. Trova l'equazione $y = f(x)$ della curva e determina:

a. la distanza di P dall'origine del sistema di riferimento dopo $2s$
b. le componenti cartesiane della velocità all'istante $t = 2$ e la direzione della velocità tangenziale
c. l'accelerazione di P all'istante $t = 1$ e la sua direzione.

$\left[y = e^x - 1;\ \mathbf{a.} \approx 3{,}3\text{m};\ \mathbf{b.}\ v_x = 1\text{m/s},\ v_y = 4\text{m/s},\ \alpha \approx 75{,}96°;\ \mathbf{c.}\ a = 2\sqrt{2}\text{m/s}^2,\ \beta = \frac{3}{4}\pi\right]$

SUL DIFFERENZIALE

Calcola il differenziale delle seguenti funzioni relativo al punto e all'incremento indicati.

85 $y = \arctan x + 2x + 1$ in $x = 3$ con $\Delta x = 0{,}1$ $[df = 0{,}21]$

86 $y = \frac{1}{6}\ln\frac{x-2}{x+2}$ in $x = 1$ con $\Delta x = 0{,}01$ $[df = -0{,}0022]$

87 $y = \frac{2x}{3}\sqrt{9 - x^2} + 2\sin x$ in $x = 0$ con $\Delta x = 0{,}02$ $[df = 0{,}08]$

88 $y = \ln\frac{x-4}{x^2}$ in $x = 6$ con $\Delta x = 0{,}03$ $[df = 0{,}005]$

89 Confronta il differenziale della funzione di equazione $y = 3x^2 - 1$ nel punto di ascissa $x = 8$ e per un incremento $\Delta x = 0{,}1$ con l'incremento della funzione. $[dy = 4{,}8;\ \Delta f(x) = 4{,}83]$

90 Utilizzando il differenziale, calcola un valore approssimato di cos 46°.
(Suggerimento: sapendo che $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, puoi determinare la variazione approssimata del valore del coseno nel passaggio da $x = 45°$ a $x + \Delta x = 45° + 1°$ valutando il differenziale della funzione $f(x) = \cos x$ con $\Delta x = 1°$; ricorda che se un angolo è espresso in gradi la derivata della funzione coseno è $-\frac{\pi}{180}\sin x$) [0,694765]

91 Utilizzando il differenziale, calcola un valore approssimato di $\sqrt{26}$, $e^{0{,}2}$, ln 0,42.
[5,1; 1,2; – 0,58]

Utilizzando il differenziale, risolvi i seguenti problemi.

92 Calcola di quanto varia l'area di un triangolo avente un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ inscritto in una semicirconferenza di raggio $r = 6\text{m}$ quando il raggio subisce un incremento $\Delta r = 3\text{mm}$.
$\left[dS = 0{,}031177\text{m}^2\right]$

93 Due lati consecutivi di un triangolo ABC sono lunghi 30cm e 20cm e l'angolo fra essi compreso è di 31,62°. Calcola un valore approssimato dell'area del triangolo. $\left[157{,}35\text{cm}^2\right]$

94 Calcola un valore approssimato della lunghezza di una corda AB di una circonferenza di raggio 10cm che sottende un angolo al centro di 61,14°. [10,1723cm]

95 Calcola di quanto aumenta approssimativamente il volume di una sfera che ha raggio $r = 4\text{dm}$ in corrispondenza dell'aumento di 1mm del raggio. $\left[2{,}011\text{dm}^3\right]$

96 Calcola di quanto varia l'area del trapezio isoscele di lato obliquo 5m circoscritto ad una semicirconferenza di raggio $r = 4\text{m}$ quando il raggio subisce un incremento $\Delta r = 2 \cdot 10^{-4}\text{m}$.
$\left[\Delta s = 0{,}0025\text{m}^2\right]$

97 L'energia W immagazzinata da un condensatore in funzione del suo potenziale V e della sua capacità C è espressa dalla relazione $W = \frac{1}{2}CV^2$. Se $C = 240 \cdot 10^{-9}\text{F}$, come varia l'energia se il potenziale passa da 12V a 11,4V? $\left[-1{,}728 \cdot 10^{-6}\ \text{Joule}\right]$

98 Un conduttore ai cui estremi è applicata una differenza di potenziale $\Delta V = 150\text{V}$ è attraversato da una corrente di $12 \cdot 10^{-3}\text{A}$. Come varia l'intensità di corrente se ΔV varia di 3V?
$\left[\Delta i = 0{,}24 \cdot 10^{-3}\text{A}\right]$

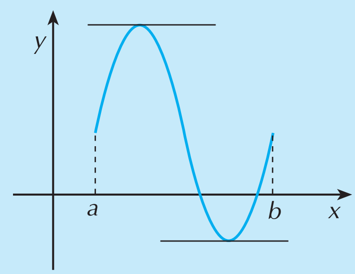
AREA 2: IL CALCOLO DIFFERENZIALE

2

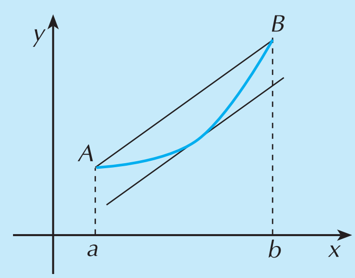
TEOREMI SULLE FUNZIONI DERIVABILI

Per ricordare

★ Le funzioni derivabili godono di alcune proprietà che sono riassunte in una serie di teoremi i più importanti dei quali sono i seguenti.



- **Teorema di Rolle.** Se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$, derivabile in (a, b) ed inoltre $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ in cui $f'(c) = 0$.
  Il teorema garantisce in sostanza l'esistenza di punti nei quali la retta tangente è parallela all'asse x.



- **Teorema di Lagrange.** Se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$ ed è derivabile in (a, b), allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ per il quale vale la relazione $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.
  Il teorema garantisce in sostanza che esistono dei punti nei quali la retta tangente alla curva rappresentata dalla funzione è parallela alla corda che passa per i punti A e B di ascissa a e b.
  Conseguenze immediate di questo teorema sono le seguenti:
  – se $f'(x) > 0$ in un intervallo I, allora $f(x)$ è crescente in I
  – se $f'(x) < 0$ in un intervallo I, allora $f(x)$ è decrescente in I
  – se $f'(x) = 0$ in tutti i punti di un intervallo I, allora $f(x)$ è costante in I
  – se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno derivate uguali in tutti i punti di un intervallo I, allora esse differiscono per una costante.

- **Teorema di Cauchy.** Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ soddisfano le seguenti ipotesi:
  – sono entrambe continue in $[a, b]$
  – sono entrambe derivabili in (a, b)
  – $g'(x)$ non si annulla mai in (a, b)
  allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ per il quale vale la relazione $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

★ Altri teoremi importanti che permettono di semplificare il calcolo di un limite sono i seguenti.

- **Primo teorema di de L'Hôpital.** Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni definite e continue nell'intorno I di un punto x_0 (escluso al più x_0) e soddisfano le seguenti ipotesi:
  – $f(x_0) = g(x_0) = 0$
  – $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in I escluso al più x_0

– $g'(x)$ non si annulla mai in I escluso al più x_0

– esiste $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

allora esiste anche $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ed è $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

- **Secondo teorema di de L'Hôpital.** Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni definite e continue nell'intorno I di un punto x_0 (escluso al più x_0) e soddisfano le seguenti ipotesi:
  – $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$
  – $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in I escluso al più x_0
  – $g'(x)$ non si annulla mai in I escluso al più x_0
  – esiste $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

  allora esiste anche $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ed è $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

In pratica questi due teoremi affermano che, nelle ipotesi indicate, se un limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ allora si può calcolare, a condizione che esista, il limite del rapporto delle derivate delle due funzioni che si trovano al numeratore e al denominatore. Per esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x^3-4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{2x}{x^2+1}}{\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-4}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4\sqrt{x^3-4}}{3(x+x^3)} = 0$$

★

Ricordiamo che gli zeri di una funzione $f(x)$ sono i valori di x per i quali risulta $f(x) = 0$; dal punto di vista geometrico essi rappresentano le ascisse dei punti di intersezione del grafico di $f(x)$ con l'asse x. L'esistenza e l'unicità degli zeri di una funzione in un certo intervallo sono garantiti dai seguenti teoremi.

- **Teorema (di esistenza).** Se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ sono di segno opposto, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ per il quale $f(c) = 0$.
- **Teorema (di unicità).** Se $f(x)$ ammette uno zero c nell'intervallo $[a, b]$ e:
  – se $f(x)$ è derivabile in (a, b) e se $f'(x)$ non si annulla mai in in tale intervallo, allora c è il solo zero in $[a, b]$
  – se $f(x)$ è derivabile due volte in (a, b) e se $f''(x)$ non si annulla mai in tale intervallo, allora c è il solo zero in $[a, b]$.

★

Un altro problema di grande interesse è quello che riguarda l'approssimazione di una funzione $f(x)$ nell'intorno di un suo punto x_0. Questo problema può essere risolto in prima approssimazione con il calcolo del differenziale di $f(x)$, ma può essere affrontato con una precisione maggiore costruendo dei polinomi di grado n, detti **polinomi di Taylor**, che si ottengono con la formula:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ESERCIZI

SUI TEOREMI DI ROLLE, LAGRANGE E CAUCHY

Stabilisci se le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo indicato e, in caso affermativo, calcola le ascisse dei punti che ne soddisfano la tesi.

1 $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x + 1$ $\quad [-1, 2]$ $\quad [x = \sqrt{7} - 2]$

2 $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ $\quad [0, 2]$ $\quad [x = 1]$

3 $f(x) = \dfrac{1 - |x|}{x - 2}$ $\quad [-1, 1]$ $\quad$ [non derivabile in $x = 0$]

4 $f(x) = (x - 1)\sqrt{4 - x^2}$ $\quad [0, 2]$ $\quad [f(0) \neq f(2)]$

5 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x < 1 \\ \log_{\frac{1}{2}} x & x \geq 1 \end{cases}$ $\quad [-\sqrt{2}, 2]$ $\quad$ [non derivabile in $x = 1$]

6 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x < 0 \\ \ln\,(x + 1) & 0 \leq x < 1 \\ x \ln 2 & x \geq 1 \end{cases}$ $\quad [-1, 2]$ $\quad [f(-1) \neq f(2)]$

7 $f(x) = \begin{cases} -2(x + 1) & x < -1 \\ \log_2(x + 2) & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2 & x > 2 \end{cases}$ $\quad [-2, 2]$ $\quad$ [non derivabile in $x = -1$]

8 Data la funzione di equazione $y = \sin^2 x - a \sin x$, verifica che il teorema di Rolle è applicabile nell'intervallo $[0, \pi]$ per qualunque valore reale di a. Determina poi per quali valori del parametro a esiste un solo c che soddisfa il teorema nell'intervallo dato e calcolane il valore.

$\left[a \leq 0 \ \vee \ a > 2;\ c = \dfrac{\pi}{2}\right]$

9 Determina i valori dei parametri reali a e b in modo che alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 + ax + b & 0 < x < 1 \\ -(x - 2)^2 + 3 & 1 \leq x \leq 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

si possa applicare il teorema di Rolle nell'intervallo in cui essa è definita; trova poi le ascisse dei punti che soddisfano il teorema. $\quad [a = 0,\ b = 1;\ x = 0,\ x = 2]$

10 Determina i valori dei parametri reali a, b, c in modo che alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & 0 \leq x < 5 \\ \sqrt{x - 4} & 5 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

si possa applicare il teorema di Rolle nell'intervallo in cui essa è definita; trova poi le ascisse dei punti la cui esistenza è assicurata dal teorema.

$\left[a = \dfrac{7}{50},\ b = -\dfrac{9}{10},\ c = 2;\ x = \dfrac{45}{14}\right]$

11 Stabilisci per quali valori del parametro reale a la funzione $f(x) = \ln|a + 3\cos 3x|$ è continua; posto poi $a = 4$, determina un intervallo nel quale sia applicabile il teorema di Rolle.

$\left[\text{continua per } a < -3 \ \vee \ a > 3\text{; un possibile intervallo } \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]\right]$

12 Stabilisci se alla funzione $f(x) = \dfrac{|9 - x^2|}{6 - x}$ può essere applicato il teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 4]$ e, in caso affermativo, trova le ascisse dei punti che ne soddisfano la tesi.

[la funzione non è derivabile in $x = 3$]

13 Dopo aver determinato per quali valori reali dei parametri a e b è applicabile il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + ax & x \le 1 \\ \dfrac{b}{x^2} & x > 1 \end{cases}$$

nell'intervallo $[0, 2]$, determina l'ascissa del punto che ne soddisfa la tesi.

$\left[a = 4 \ \wedge \ b = 1;\ x = \frac{31}{48}\right]$

14 Dopo aver determinato per quali valori reali dei parametri a e b è applicabile il teorema di Lagrange alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 1}{x + 3} & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ ax^2 + bx - 1 & \dfrac{1}{2} < x \le 2 \end{cases}$$

nell'intervallo $[0, 2]$, determina l'ascissa del punto che ne soddisfa la tesi.

$\left[a = -\frac{20}{7},\ b = \frac{24}{7};\ x = \frac{127}{120}\right]$

15 Data la funzione di equazione $f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - ax + a & 1 < x \le 2 \end{cases}$, determina il valore del parametro a in modo che sia applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 2]$; calcola poi i valori di x dei quali il teorema garantisce l'esistenza.

$\left[a = -1;\ x = \frac{\sqrt{30}}{6}\right]$

16 Stabilisci per quali valori dei parametri a e b si può applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x + 1} + \sin x & x \ge 0 \\ ax^2 + \left(a + \dfrac{1}{2}\right)x - a + b & x < 0 \end{cases}$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

$\left[a = \frac{5}{6},\ b = \frac{11}{6}\right]$

17 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} (x + a)^2 & x \le 0 \\ 2x^2 + bx + c & x > 0 \end{cases}$ dove a, b, c sono tre parametri reali, stabilisci per quali valori di tali parametri essa soddisfa nell'intervallo $[-1, 1]$:

a. il teorema di Rolle e determina poi in tale caso le ascisse dei punti che soddisfano la tesi del teorema

$\left[a = -\frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{16};\ x = \frac{1}{8}\right]$

b. il teorema di Lagrange in modo che il punto che ne soddisfa la tesi abbia ascissa $\frac{1}{8}$.

$[\forall a,\ b = 2a,\ c = a^2]$

18 Considera l'arco di parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ che ha come estremi i punti di ascissa α e β con $\alpha < \beta$. Dimostra che il punto dell'arco che verifica il teorema di Lagrange nell'intervallo $[\alpha, \beta]$ ha ascissa $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

19 Stabilisci se è possibile applicare il teorema di Cauchy alle funzioni $f(x) = e^{-2x^2}$ e $g(x) = 1 - x^2$ nell'intervallo $[-1, 0]$ e, in caso affermativo, trova i valori di x dei quali il teorema garantisce l'esistenza.
$\left[x = -\sqrt{-\frac{1}{2}\ln\frac{1-e^{-2}}{2}}\right]$

20 Considerate le funzioni $f(x) = |4x - 5|$ e $y = x^2 + 3$ determina in quale intervallo della forma $[a, 7]$ può essere applicato il teorema di Cauchy.
$\left[\frac{5}{4} \leq a < 7\right]$

21 Date le funzioni $f(x) = a\sin^2 x + \cos x$ e $g(x) = 2\sin x - 1$, determina il valore del parametro reale a in modo che esse soddisfino il teorema di Cauchy nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e nel punto $x = \frac{\pi}{3}$.
$[a = 1]$

SUI TEOREMI DI DE L'HÔPITAL

Calcola i seguenti limiti applicando quando è possibile i teoremi di de L'Hôpital.

22 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x(\sin x - 1)$ $[0]$

(Suggerimento: trasforma la forma di indeterminazione $0 \cdot \infty$ nella forma $\frac{0}{0}$ scrivendo la funzione come $\frac{\sin x - 1}{\frac{1}{\tan x}}$)

23 $\lim_{x \to 0} xe^{-\frac{1}{x}}$ $[x \to 0^- : -\infty;\ x \to 0^+ : 0]$

24 $\lim_{x \to 0} (\cos x - 1)\text{cotan } x$ $[0]$

25 $\lim_{x \to \infty} x\sin\frac{1}{x}$ $[1]$

26 $\lim_{x \to 0} x^2 \ln\frac{1}{x}$ $[0]$

27 $\lim_{x \to +\infty} x^2 \ln\frac{1}{x}$ $[-\infty]$

28 $\lim_{x \to -\infty} \frac{1 + x^3}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{\ln(3 - x)}$ $[+\infty]$

29 $\lim_{x \to 3^-} (9 - x^2)^{3-x}$ $[1]$

(Suggerimento: tenendo presente che $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$, trasforma la funzione nella forma $e^{(3-x)\ln(9-x^2)}$ e calcola $\lim_{x \to 3^-} (3 - x)\ln(9 - x^2)$)

30 $\lim_{x \to 0} (e^x - x)^{\frac{2}{x}}$ $[1]$

31 $\lim_{x \to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ $[1]$

32 $\lim_{x\to 0} (e^{2x} - x^2)^{\frac{2}{x}}$ $[e^4]$

33 $\lim_{x\to 0} (3^x + x)^{\frac{1}{x}}$ $[3e]$

34 $\lim_{x\to +\infty} (x^3 + 5x)^{\frac{1}{\ln x}}$ $[e^3]$

35 $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^3 + 4}\right)^{\frac{5}{x}}$ $[1]$

36 $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^3 + 4x}{2x^2 - 1}\right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x}}$ $[1]$

37 $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1 - 5x}{3 - 5x}\right)^{x^2}$ $[+\infty]$

38 $\lim_{x\to 2} (x - 1)^{\frac{1}{x-2}}$ $[e]$

39 $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[x]{x^2}$ $[1]$

40 $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$ $[e]$

41 $\lim_{x\to +\infty} (x^3 - 1)^{\frac{1}{2+x^2}}$ $[1]$

42 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^{\tan x}$ $[e^2]$

43 $\lim_{x\to 0} (x^3 + 2x)^{\sin x}$ $[1]$

44 $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ $[e^{-2}]$

45 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$ $[1]$

46 $\lim_{x\to 0^+} (\ln x)^{\frac{x}{2}}$ $[1]$

47 $\lim_{x\to 0} \left[\log_{\frac{1}{2}} x^2\right]^x$ $[1]$

48 $\lim_{x\to \pi} (\pi - x)^{\sin x}$ $[1]$

49 $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x - 1}\right)^{\ln(2-x^2)}$ $[1]$

50 $\lim_{x\to 0} x^{\frac{2}{3+4 \ln x}}$ $[\sqrt{e}]$

51 $\lim_{x\to 4} [\ln(5 - x)]^{x-4}$ $[1]$

52 $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{(\sin 3x)^{\frac{1}{\cos 3x}}}{x}$ $\left[\frac{6}{\pi}\right]$

53 $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1 - x}\right)^{\ln(2-x)}$ $[1]$

54 $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x - 1}{3 - x^2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ $[1]$

55 $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (1 + \cos x - \sin x)^{\frac{1}{\tan^2 x - 1}}$ $\left[e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}}\right]$

56 $\lim_{x \to 0^+} (1 + \sin x)^{-\ln x}$ $[1]$

57 $\lim_{x \to 0} (1 + x^3)^{\frac{1}{x^4 + \sin x^4}}$ $[+\infty]$

58 $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$

59 $\lim_{x \to 0} (\sin x)^{1 - \cos x}$ $[1]$

60 $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x^2} + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $[1]$

61 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $\left[e^{-\frac{1}{6}}\right]$

62 $\lim_{x \to 0} (\arctan x^3)^x$ $[1]$

63 $\lim_{x \to 1} \left[\frac{3x}{(x-1)^2}\right]^{\ln x}$ $[1]$

PROBLEMI

64 Date le funzioni $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = -x^2$, determina un $h \in R$ e un $c \in (-1, h)$ in modo che sia $f'(c) = 2\,g'(c)$.
(Suggerimento: applica il Teorema di Cauchy all'intervallo $[-1, h]$) $\left[h = \frac{5}{3},\ c = \frac{1}{3}\right]$

65 Di un triangolo ABC si conoscono le lunghezze di due lati consecutivi, $AB = 5$m e $BC = 3$m. Esprimi l'area del triangolo in funzione dell'angolo x compreso fra i due lati e stabilisci per quali valori di x l'area assume valori crescenti. $\left[0 < x < \frac{\pi}{2}\right]$

66 Calcola il valore di $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{x^2} - x\right)^{\frac{1}{x^\alpha}}$ al variare di α in R. $[\alpha < 2 : +\infty;\ \alpha = 2 : e;\ \alpha > 2 : 1]$

67 Per ognuna delle seguenti funzioni stabilisci se si può calcolarne il limite per $x \to +\infty$ e spiega se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di de L'Hôpital:

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - \tan x}{3x^2 + \tan x}$ [il limite non esiste]

b. $f(x) = \dfrac{x^2 - \sin x}{x + \cos x}$ $[+\infty;\ \text{no}]$

c. $f(x) = \dfrac{4x^2 - \sin x + \cos x}{\sin x - x^2}$ $[-4;\ \text{no}]$

68 Servendoti del teorema di Rolle dimostra che la funzione $f(x) = e^{2x} + x$ ammette una sola soluzione nell'intervallo $[-1, 1]$.
(Suggerimento: verificato che esiste almeno una soluzione, supponi per assurdo che ne esistano due distinte x_1 e x_2; poiché $f(x_1) = f(x_2) = 0$, deve esistere almeno un punto $c \in (x_1, x_2)$ in cui la derivata prima della funzione si annulla. Poiché tale punto non esiste ....)

69 Servendoti del teorema di Rolle, dimostra che la funzione $f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x$ ha quattro punti nei quali la retta tangente è parallela all'asse delle ascisse.

70 Dimostra che la funzione $y = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ è costante e determina il valore di tale costante sia per $x > 0$ che per $x < 0$.
$\left[x > 0 : \frac{\pi}{2};\ x < 0 : -\frac{\pi}{2}\right]$

71 Determina per quali valori del parametro reale k la funzione $f(x) = \dfrac{2x^2 + kx}{x - k}$ è crescente in $x = 3$.
$\left[-6 - 3\sqrt{6} < k < -6 + 3\sqrt{6}\right]$

72 Considerata la funzione di equazione $y = ax^3 + (a - 1)x^2 - 2x + a$, stabilisci per quali valori del parametro reale a essa è decrescente $\forall x \in R$. Esistono dei valori di a per i quali la funzione è sempre crescente?
$\left[-2 - \sqrt{3} \le a \le -2 + \sqrt{3};\ \text{no}\right]$

73 Studia la crescenza e la decrescenza della funzione $f(x) = \dfrac{kx}{x^2 + 1}$ al variare di k in R.
$\left[k > 0 : \text{cresce per } -1 < x < 1;\ k = 0 : \text{funzione costante } y = 0;\ k < 0 : \text{cresce per } x < -1 \ \vee\ x > 1\right]$

74 Determina quali condizioni devono soddisfare i parametri reali a e b affinché la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + a}}{2x + b}$ passi per il punto $P(0, 2)$ e sia decrescente in tale punto. In tali condizioni, posto $b = 1$, studia la crescenza e la decrescenza della funzione f.
$\left[a = 4b^2 \wedge \left(b < 0 \ \vee\ b > \frac{1}{16}\right);\ D : \left[-4,\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},\ +\infty\right), \text{ sempre decrescente}\right]$

75 Verifica che la funzione $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ è simmetrica rispetto al suo punto di ascissa $\dfrac{4}{3}$ e ammette tre zeri; determina quindi gli intervalli di ampiezza massima 1 a cui appartiene ciascuna soluzione.
$\left[\alpha \in (-1, 0),\ \beta \in (0, 1),\ c \in \left(\frac{7}{2},\ \frac{9}{2}\right)\right]$

76 Verifica che la funzione $f(x) = xe^x - 3$ ammette uno zero nell'intervallo $[1, 2]$ e stabiliscine l'unicità.

77 Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{x - 3}{x} - \ln \dfrac{1}{x - 1}$, verifica che ammette un solo zero nell'intervallo $[2, 3]$ e che non ne ammette altri.

78 Verifica che la funzione $f(x) = x(x - 5) + \ln x$ si annulla in un solo punto che appartiene all'intervallo $[4, 5]$.

79 Un punto percorre una retta con velocità $v = -\dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{3}{2}t^2 - t + 1$. In quale intervallo di tempo la velocità aumenta?
$\left[\frac{1}{2} < t < 1\right]$

80 Un corpo si muove secondo la legge oraria $s = \dfrac{3}{4}t^4 - \dfrac{1}{2}t^2 - 1$. Determina in quali intervalli di tempo la velocità aumenta ed in quali diminuisce.
$\left[\text{aumenta se } t > \frac{1}{3},\ \text{diminuisce se } 0 < t < \frac{1}{3}\right]$

81 La velocità di un corpo varia secondo la legge $v(t) = t \ln t - t$. Indica in quali intervalli di tempo il corpo accelera e in quali decelera.
$[0 < t < 1 : \text{decelera};\ t > 1 : \text{accelera}]$

82 La velocità di un punto materiale varia secondo la legge $v(t) = \begin{cases} 5 & 0 \le t \le 1 \\ t + 4 & 1 < t < 2 \\ -t^2 + 6t - 2 & 2 \le t \le 10 \end{cases}$.

Traccia il grafico della funzione velocità e descrivi il moto del corpo in funzione di t specificando gli intervalli di tempo in cui il corpo accelera o decelera; trova poi in quale istante raggiunge la massima velocità e quando la velocità è nulla. $[v_{max}$ in $t = 3$; v nulla in $t = 3 + \sqrt{7}]$

SUI POLINOMI DI TAYLOR

Determina il polinomio di Taylor di ordine n che approssima la funzione $f(x)$ nel punto x_0 indicato.

83 $f(x) = \sqrt{1 + x^3}$ $\quad n = 3$ $\quad x_0 = 0$ $\quad \left[P_3(x) = \frac{1}{2}x^3 + 1\right]$

84 $f(x) = \frac{e^x}{x}$ $\quad n = 2$ $\quad x_0 = 1$ $\quad \left[P_2(x) = \frac{e(x^2 - 2x + 3)}{2}\right]$

85 $f(x) = \ln x + x^2$ $\quad n = 3$ $\quad x_0 = 2$ $\quad \left[P_3(x) = \ln 2 + \frac{x^3 + 15x^2 + 36x - 44}{24}\right]$

86 $f(x) = e^x \ln x$ $\quad n = 3$ $\quad x_0 = 1$ $\quad \left[P_3(x) = \frac{e(x-1)(2x^2 - x + 5)}{6}\right]$

87 $f(x) = x \cos x$ $\quad n = 5$ $\quad x_0 = 0$ $\quad \left[P_5(x) = \frac{1}{24}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + x\right]$

88 $f(x) = \sqrt{\cos x}$ $\quad n = 4$ $\quad x_0 = 0$ $\quad \left[P_4(x) = -\frac{1}{96}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + 1\right]$

89 Calcola un valore approssimato di $e^{-0,31}$ e valuta l'errore usando il resto di Lagrange. (Suggerimento: scritto lo sviluppo della funzione e^x con $n = 3$ e $x_0 = 0$, sostituisci il valore $-0,31$ nel polinomio ottenuto; l'errore è dato dall'espressione $\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$ che in questo caso è uguale a $\frac{e^\xi}{4!}x^4$; poiché in un intorno sinistro dello zero la funzione e^x è minore di 1, si può dire che l'errore è minore di $\frac{x^4}{4!}$, cioè ....) $[0{,}73308483,\ E < 0{,}0003848]$

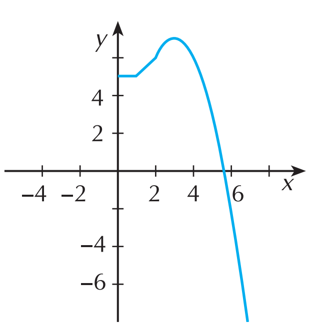
90 Calcola un valore approssimato di sin 0,2 e dai una stima dell'errore commesso. $[0{,}19866,\ E < 5 \cdot 10^{-5}]$

91 Calcola un valore approssimato di cos 0,3 e dai una stima dell'errore commesso. $[0{,}9553375,\ E < 2 \cdot 10^{-5}]$

92 Calcola un valore approssimato di ln 1,03 e dai una stima dell'errore commesso. $[0{,}02955880223,\ E < 10^{-10}]$

Risultati di alcuni esercizi.

82.



AREA 2: IL CALCOLO DIFFERENZIALE

3

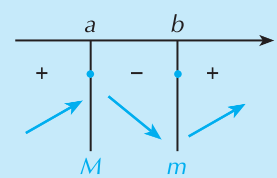
PUNTI ESTREMANTI E PUNTI DI INFLESSIONE

Per ricordare

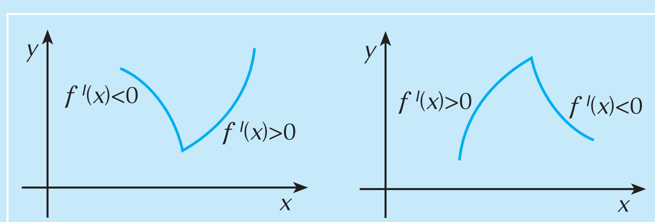
★ Considerata una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$:

- un punto $x_0 \in [a, b]$ è un **punto di minimo relativo** per $f(x)$ se $f(x_0)$ è il valore più piccolo che la funzione assume in un intorno di tale punto, cioè se esiste un intorno di x_0 per tutti i punti x del quale $f(x) \geq f(x_0)$;
  in questo caso $f(x_0)$ è il minimo relativo della funzione
- un punto $x_0 \in [a, b]$ è un **punto di massimo relativo** per $f(x)$ se $f(x_0)$ è il valore più grande che la funzione assume in un intorno di tale punto, cioè se esiste un intorno di x_0 per tutti i punti x del quale $f(x) \leq f(x_0)$;
  in questo caso $f(x_0)$ è il massimo relativo della funzione.

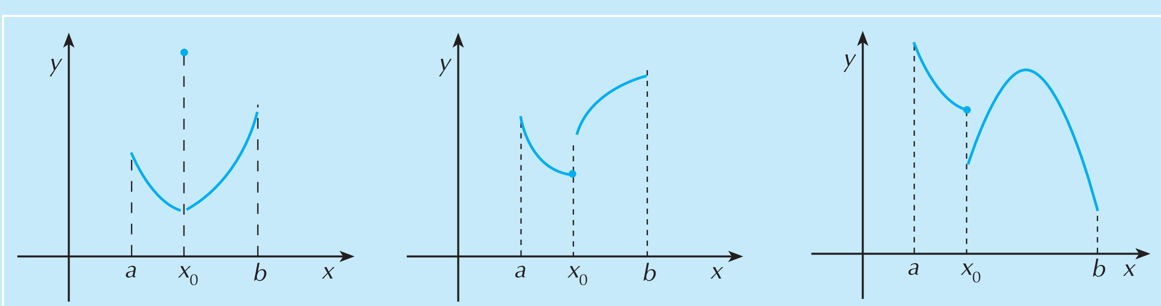
★ Per determinare i punti di massimo e di minimo relativi di una funzione continua e derivabile basta studiare il segno della derivata prima in modo da stabilire quando la funzione cresce, quando decresce e quali sono i punti stazionari; dalla tabella dei segni risultano in questo modo evidenti i punti estremanti.



Se la funzione è continua ma non è derivabile in un punto x_0, è necessario studiare il suo comportamento in un intorno di tale punto: se la derivata prima ha un segno nell'intorno sinistro e segno opposto nell'intorno destro, allora x_0 è un punto estremante.

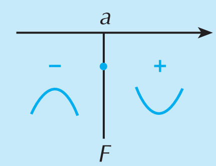


Se la funzione non è continua in un punto x_0 si possono presentare situazioni simili a quelle nella figura in basso; lo studio del segno della derivata prima non è in questi casi decisivo per l'individuazione dei punti estremanti ed occorre applicare la definizione.



★ I **punti di massimo o di minimo assoluti** di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ sono i punti in cui la funzione assume il valore più grande o il valore più piccolo rispetto a tutti gli altri punti dell'intervallo; essi, se esistono, vanno ricercati fra i massimi o i minimi relativi, oppure fra i valori assunti dalla funzione negli estremi dell'intervallo considerato.

★ La derivata seconda di una funzione rappresenta la concavità della curva: se è negativa la concavità è rivolta verso il basso, se è positiva è rivolta verso l'alto. Essa ci consente poi di trovare i punti di **flesso** della funzione. In particolare, per individuarli si deve:



- trovare i punti che annullano la derivata seconda o quelli in cui essa non esiste
- studiare il segno della derivata seconda
- dedurre dalla tabella ottenuta quali punti rappresentano dei flessi.

★ Per trovare i punti di massimo e di minimo relativo e i punti di flesso di una funzione $f(x)$, in alternativa ai metodi precedenti e se esistono le derivate successive di $f(x)$ fino a quella di ordine n, si può seguire questa procedura:

- si cercano i punti x_0 che annullano la derivata prima e si calcolano le derivate successive in x_0 fino a che se ne trova una che è diversa da zero; se questa è di ordine n, allora:
  - se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\rightarrow$ x_0 è un punto di minimo
  - se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\rightarrow$ x_0 è un punto di massimo
  - se n è dispari $\rightarrow$ x_0 è un punto di flesso a tangente orizzontale
- si cercano i punti x_0 che annullano la derivata seconda e si calcolano le derivate successive in x_0 fino a che se ne trova una che è diversa da zero; se questa è di ordine n, allora:
  - se n è dispari $\rightarrow$ x_0 è un punto di flesso
  - se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\rightarrow$ in x_0 la funzione è concava verso l'alto
  - se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\rightarrow$ in x_0 la funzione è concava verso il basso.

Esercizi

Trova i punti di massimo e di minimo relativi delle seguenti funzioni.

1 $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ $[m(3, 0), \text{ cuspide}]$

2 $f(x) = \sqrt{x+2} + 2\sqrt{4-x}$ $\left[M\left(-\frac{4}{5}, \sqrt{30}\right); m(-2, 2\sqrt{3}), m(4, \sqrt{6})\right]$

3 $f(x) = \dfrac{|x-5|}{\sqrt{x}}$ $[m(5, 0)]$

4 $f(x) = e^{-x} + 2x$ $[m(-\ln 2, 2 - 2\ln 2)]$

5 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ $\left[M\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 2\right); m\left(\frac{4}{3}\pi + 2k\pi, -2\right)\right]$

6 $f(x) = \frac{3}{7}x - \sqrt{x^2+9}$ $\left[M\left(\frac{9\sqrt{10}}{20}, -\frac{6\sqrt{10}}{7}\right)\right]$

7 $f(x) = 2x\ln^2 x$ $\quad\left[m(1,\,0);\ M\left(e^{-2},\,8e^{-2}\right)\right]$

8 $f(x) = \dfrac{7\ln 3x}{x^2}$ $\quad\left[M\left(\dfrac{\sqrt{e}}{3},\ \dfrac{63}{2e}\right)\right]$

9 $f(x) = 5\sqrt[5]{x^3} - x^3$ $\quad[m(-1,\,-4);\ M(1,\,4)]$

10 $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2}$ $\quad\left[M(1,\,2);\ m(0,\,\sqrt[3]{4}),\ m(2,\,\sqrt[3]{4})\text{ entrambi cuspidi}\right]$

11 $f(x) = -2e^x(x^2+1)$ $\quad$[nè massimi nè minimi]

12 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4}$ $\quad[M(\pm 1,\,0)]$

13 $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x-3}}$ $\quad[m(4,\,2)]$

14 $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x}$ $\quad[M(-1,\,0);\ m(1,\,0)\text{ entrambi cuspidi}]$

15 $f(x) = \sqrt[4]{x^2(4-x^2)}$ $\quad\left[M(-\sqrt{2},\,\sqrt{2});\ M(\sqrt{2},\,\sqrt{2});\ m(-2,\,0);\ m(2,\,0);\ m(0,\,0),\text{ cuspide}\right]$

16 $f(x) = (x-2)^2 \cdot \sqrt{x}$ $\quad\left[M\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{64\sqrt{10}}{125}\right),\ m(2,\,0),\ m(0,\,0)\right]$

17 $f(x) = \sqrt{2 + x\sqrt{x+1}}$ $\quad\left[M(-1,\,\sqrt{2});\ m\left(-\dfrac{2}{3},\ \sqrt{2-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}\right)\right]$

18 $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{4x^2-x}}{x^2}$ $\quad\left[M\left(\dfrac{3}{8},\ \dfrac{8\ln 2 - 3\ln 3}{2}\right)\right]$

19 $f(x) = \dfrac{2xe^x}{2x-1}$ $\quad\left[M\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2\sqrt{e}}\right),\ m(1,\,2e)\right]$

20 $f(x) = e^{\cos x}$ in $[0,\,2\pi)$ $\quad\left[M(0,\,e),\ m\left(\pi,\ \dfrac{1}{3}\right)\right]$

21 $f(x) = x - \arccos\dfrac{1-2x}{1+2x}$ $\quad\left[m\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1-\pi}{2}\right);\ M(0,\,0)\right]$

Determina il minimo e il massimo assoluti delle funzioni date negli intervalli indicati.

22 $y = x^3 - 2x$ in $[0,\,4]$ $\quad\left[-\dfrac{4\sqrt{6}}{9};\ 56\right]$

23 $y = \sin x(\cos x + 1)$ in $[0,\,2\pi]$ $\quad\left[-\dfrac{3\sqrt{3}}{4};\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

24 $y = \dfrac{x}{x^3+1}$ in $[0,\,+\infty]$ $\quad\left[0;\ \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}\right]$

25 $y = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x}$ in $[1,\,3]$ $\quad[1;\ \sqrt{3}]$

26 $y = \dfrac{x^2+9}{3x}$ in $\left[-5,\ -\dfrac{1}{2}\right]$ $\quad\left[-\dfrac{37}{6};\ -2\right]$

27 $y = \dfrac{x}{1+\sqrt{x-1}}$ in $[1,\ 3]$ $[2\sqrt{2}-2;\ 3\sqrt{2}-3]$

28 $y = x - \cos 2x$ in $[0,\ \pi]$ $[-1;\ \pi-1]$

29 $y = \dfrac{\sin x + 1}{2 - \cos x}$ in $[0,\ 2\pi]$ $\left[0;\ \dfrac{4}{3}\right]$

Studia la concavità e trova i punti di flesso delle seguenti funzioni.

30 $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^2 - x$
$\left[\text{concavità verso l'alto: } x < -\dfrac{\sqrt{6}}{3} \ \vee\ x > \dfrac{\sqrt{6}}{3};\ F_1\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{3\sqrt{6}-5}{9}\right);\ F_2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ -\dfrac{3\sqrt{6}+5}{9}\right)\right]$

31 $y = -x^4 + 15x^3 + 2$ $\left[\text{concavità verso l'alto: } 0 < x < \dfrac{15}{2};\ F_1(0,\ 2);\ F_2\left(\dfrac{15}{2},\ \dfrac{50657}{16}\right)\right]$

32 $y = 2x^5 - 10x^4 + 15x^3$ $[\text{concavità verso l'alto: } x > 0;\ F(0,\ 0)]$

33 $y = \dfrac{2x^4}{x^2-1}$ $[\text{concavità verso l'alto: } x < -1 \ \vee\ x > 1;\ \text{non esistono flessi}]$

34 $y = \dfrac{x}{x^3-27}$ $\left[\text{concavità verso l'alto: } x < -3\sqrt[3]{2} \ \vee\ x > 3;\ F\left(-3\sqrt[3]{2},\ \dfrac{\sqrt[3]{2}}{27}\right)\right]$

35 $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+1}$ $\left[\text{concavità verso l'alto: } -\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{3};\ F_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{4}\right);\ F_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3}{4}\right)\right]$

36 $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x}$ $\left[\text{concavità verso l'alto: } x > 6+2\sqrt{3};\ F\left(6+2\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt[4]{108}}{12}\right)\right]$

37 $f(x) = \ln(1+x^3)$ $\left[\text{concavità verso l'alto: } 0 < x < \sqrt[3]{2};\ F_1(0,\ 0);\ F_2(\sqrt[3]{2},\ \ln 3)\right]$

38 $f(x) = x - 2\sin x$ $[\text{concavità verso l'alto: } 2k\pi < x < \pi + 2k\pi;\ \text{punti di flesso in } x = k\pi]$

39 $y = e^{\frac{1}{x^2}}$ $[\text{concavità verso l'alto } \forall x \in D]$

40 $f(x) = e^{2+x-x^2}$ $\left[\text{concavità verso l'alto: } x < \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \ \vee\ x > \dfrac{1+\sqrt{2}}{2};\ F_1\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2},\ e^{\frac{7}{4}}\right);\ F_2\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2},\ e^{\frac{7}{4}}\right)\right]$

41 $f(x) = e^{\ln x - x^2}$ $\left[\text{concavità verso l'alto: } x > \dfrac{\sqrt{6}}{2};\ F\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{2e\sqrt{e}}\right)\right]$

42 $f(x) = x - \dfrac{1}{x} - 2\ln x$ $[\text{concavità verso l'alto: } x > 1;\ F(1,\ 0)]$

43 $y = \ln \sin x$ $[\text{concavità sempre verso il basso in } (k\pi,\ \pi + k\pi);\ \text{non esistono flessi}]$

44 $f(x) = \arcsin \dfrac{3x^2-1}{6x^2+1}$ $[\text{concavità sempre verso il basso, non ci sono flessi}]$

45 $f(x) = \arctan \dfrac{x}{x-1}$ $\left[\text{concavità verso l'alto: } x > \dfrac{1}{2};\ F\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

46 $f(x) = x - \arccos x$ $\left[\text{concavità verso l'alto: } 0 < x < 1;\ F\left(0,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

Determina le coordinate degli eventuali punti di flesso delle seguenti funzioni e scrivi l'equazione della tangente inflessionale.

47 $y = \dfrac{3-x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\left[F_1\left(-1,\ 2\sqrt{2}\right),\ 2y - \sqrt{2}x - 5\sqrt{2} = 0;\ F_2\left(\frac{1}{2},\ \sqrt{5}\right),\ 4\sqrt{5}x + 5y - 7\sqrt{5} = 0\right]$

48 $y = \dfrac{x^3+8}{x}$ $[F_1(-2,\ 0);\ 6x + y + 12 = 0]$

49 $y = \dfrac{5-x}{\sqrt{x^2+5}}$ $\left[F_1\left(-\frac{5}{2},\ \sqrt{5}\right);\ 4\sqrt{5}x - 45y + 55\sqrt{5} = 0;\ F_2\left(1,\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\right);\ 5\sqrt{6}x + 18y - 17\sqrt{6} = 0\right]$

PROBLEMI

50 Stabilisci per quali valori del parametro reale k, la funzione $y = \dfrac{1-4kx^2}{x-3}$ ha punti estremanti. $\left[k < 0\ \vee\ k > \frac{1}{36}\right]$

51 Stabilisci per quali valori dei parametri reali a e b la funzione $f(x) = \ln\left(ax^2 - bx\right)$ presenta un massimo relativo nel punto $A(1,\ 0)$. $[a = -1,\ b = -2]$

52 Data la funzione $f(x) = \dfrac{ax}{x^2+1}$, verifica che ammette tre flessi per qualunque valore non nullo del parametro reale a e che tali flessi appartengono ad una stessa retta di cui si chiede l'equazione. $\left[F_1(0,\ 0);\ F_{2,3}\left(\pm\sqrt{3},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{4}a\right);\ y = \frac{1}{4}ax\right]$

53 Della funzione $f(x)$ di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sa che ha un minimo nel punto $A(-1,\ 3)$ e un punto di flesso di ascissa 1. Qual è l'equazione di queste curve? [$y = ax^3 - 3ax^2 - 9ax - 5a + 3$, affinchè in A ci sia un minimo deve essere $a < 0$]

54 Determina per quali valori del parametro reale k la funzione di equazione $y = e^{x^3 - 3kx + 1}$ ammette due estremi relativi distinti. Per tali valori di k, scrivi poi l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto di massimo. $\left[k > 0;\ y = e^{-2x^3+1}\right]$

55 Studia e rappresenta il luogo dei punti descritto dal punto estremante della funzione di equazione $y = -kx^2 + (2k+1)x - 3k$. $\left[y = \frac{x^2-3}{2(x-1)}\right]$

56 Stabilisci per quali valori dei parametri reali a e b la funzione $f(x) = \dfrac{ax^3 - b}{x-1}$ presenta un flesso nel punto $P(2,\ -2)$. In corrispondenza di tali valori trova poi i punti estremanti della funzione. $\left[a = -\frac{1}{3},\ b = -\frac{2}{3};\ \text{punto di massimo in } x \approx -0{,}68\right]$

57 Determina i valori dei parametri reali a e b in modo che la funzione di equazione $y = \ln\,(x^2 + 2ax + b)$ abbia un estremo relativo nel punto di ascissa $x = -1$ e un flesso in $x = -3$. Determina poi l'ulteriore punto di flesso. $[a = 1,\ b = 5;\ P(1,\ 3\ln 2)]$

58 Determina il valore dei parametri reali della funzione $f(x) = ax^3 + 3x + b$ in modo che la curva da essa rappresentata abbia un massimo relativo uguale a zero e intersechi l'asse x nel punto di ascissa $-2\sqrt{2}$. $\left[a = -\frac{1}{2},\ b = -2\sqrt{2}\right]$

59 Studia la natura dei punti stazionari della famiglia di funzioni $y = 8ke^{2x} + 8k^2e^x + k^3x$ al variare del parametro reale $k \neq 0$. Determina poi l'equazione del luogo descritto da tali punti.
[punti stazionari (flessi) solo per $k < 0$; equazione del luogo: $y = 32e^{3x}(3 - 2x)$]

60 Stabilisci se esiste un legame fra i punti estremanti delle funzioni $f(x)$ e $e^{f(x)}$; esiste lo stesso legame anche per i punti di flesso?

61 Calcola i massimi, i minimi e gli zeri delle funzioni $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ e $g(x) = |x^3 + x^2 - 2x|$. Prendendo spunto da queste due funzioni, descrivi la relazione che esiste in generale tra i punti estremanti delle funzioni $f(x)$ e $|f(x)|$.

62 Studia i punti di massimo e minimo, assoluti e relativi, della funzione $y = x^2 + 2x - 3|x| + 3$ nell'intervallo $[-3, 2]$.
[massimo relativo in $x = -3$, $x = 0$ (punto angoloso); massimo assoluto in $x = 2$; minimo relativo in $x = \frac{1}{2}$, minimo assoluto in $x = -\frac{5}{2}$]

63 Studia i punti stazionari della funzione $y = \frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$.
[infiniti flessi nei punti di ascissa $x = \frac{1}{\pi + 2k\pi}$, $k \in R$]

64 Dimostra che qualunque cubica di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ è simmetrica rispetto al punto di flesso e che, di conseguenza, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativi sono simmetrici rispetto a tale punto.

PROBLEMI DI MASSIMO E DI MINIMO ASSOLUTO

65 Preso un punto P su un segmento AB di lunghezza ℓ, costruisci la semicirconferenza di diametro PB ed il triangolo equilatero APC di lato AP nello stesso semipiano definito dalla retta AB; determina la posizione di P in modo che sia minima l'area della figura ottenuta. Successivamente traccia da C la retta tangente in Q alla semicirconferenza e determina come deve essere scelto il punto P in modo che sia massima l'area del triangolo QOC, essendo O il centro della semicirconferenza.
[posto $\overline{BP} = x$, area minima per $x = \frac{2\sqrt{3}\ell}{2\sqrt{3} + \pi}$; area($QOC$) massima per $x = \frac{9 - \sqrt{17}}{8}\ell$]

66 Su una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ prendi un punto P e un punto Q tali che siano congruenti gli archi PQ e BQ. Determina la posizione del punto P in modo che sia massimo il perimetro del quadrilatero $ABQP$.
[$\widehat{PAB} = \frac{\pi}{3}$]

67 Una circonferenza Γ è concentrica ad una seconda circonferenza Γ' di raggio unitario ed è ad essa interna. Da un punto R di Γ' conduci le rette tangenti alla circonferenza Γ che la incontrano in P e Q. Determina la misura del raggio r di Γ in modo che il triangolo PQR abbia area massima. Valuta poi il perimetro di questo triangolo e verifica che ad esso corrisponde anche il massimo perimetro.
[$r = \frac{1}{2}$]

68 E' dato il triangolo ABC rettangolo in A con $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ e $\overline{BC} = a$. Determina un punto P sul lato AC in modo che sia massima l'area del trapezio rettangolo $BHPK$, dove H è la proiezione di P sull'ipotenusa BC e K è il punto in cui la parallela per P al lato BC interseca AB.
[$\overline{PC} = \frac{2}{7}\sqrt{3}a$]

69 Data la semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e centro O, sia CD una corda parallela al diametro e sia E il punto medio dell'arco AB; indicate con H e K le proiezioni dei punti C e D sul diametro, determina la posizione di CD in modo che l'area del pentagono $CEDKH$ sia massima.
[posto $\overline{CH} = x$, area massima in $x = \frac{1}{2}r$]

70 Sia XOY un angolo retto di vertice O; considerati i punti A e B sul lato OX in modo che sia $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$, con $a < b$, sia P un punto del lato OY. Posto $\overline{OP} = x$, per quale valore di x risulta massima l'ampiezza dell'angolo $\widehat{APB}$? $\left[x = \sqrt{ab}\right]$

71 Verifica che fra tutti i trapezi isosceli di perimetro dato p e di base maggiore data a, quello che ha area maggiore è il rettangolo.

72 Per il vertice A di un triangolo equilatero di lato ℓ conduci una retta r che non interseca il triangolo e siano B' e C' le proiezioni di B e C su r; Posto $\widehat{B'AB} = x$, determina il valore di x in modo che l'area del quadrilatero $BCC'B'$ sia massima. $\left[x = \frac{\pi}{3}\right]$

73 Fra i trapezi inscritti in una semicirconferenza di raggio r, determina quello per il quale è massima la somma di un lato obliquo con il doppio di una diagonale. In corrispondenza di tale valore, calcola il perimetro e l'area del trapezio.

$\left[\text{indicato con } x \text{ l'angolo alla base del trapezio, } x = \arctan 2;\ 2p = \frac{4}{5}r(4 + \sqrt{5});\ \text{area} = \frac{32}{25}r^2\right]$

74 Sia ABC un triangolo isoscele di base AB con gli angoli alla base di ampiezza $\frac{\pi}{6}$ e lati obliqui $\overline{AC} = \overline{CB} = 1$. Indicato con M il punto medio della base, determina come deve essere tracciata una corda PQ parallela ad AB in modo che sia massimo il rapporto $\frac{A_1 + A_2}{A_3 + A_2}$, essendo A_1 l'area del triangolo PMQ, A_2 l'area del triangolo PCQ e A_3 l'area del triangolo APM. $\left[\overline{PC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

75 Dimostra che fra i poligoni regolari aventi lo stesso perimetro p:

a. l'area cresce al crescere del numero dei lati;

b. considerati i poligoni regolari che si possono usare per la tassellatura di un piano, l'esagono è quello di area massima.

76 Sia P un punto di una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e centro O; determina la posizione di P in modo che il solido che si ottiene facendo ruotare il triangolo AOP di una rotazione completa attorno alla retta del diametro abbia volume massimo. $\left[\widehat{PAO} = \frac{\pi}{4}\right]$

77 Un cono ha come base una circonferenza di centro O e raggio r e altezza h; stabilisci la posizione che deve assumere un piano parallelo alla base se si vuole che il cono che ha per base la sezione ottenuta e per vertice il punto O abbia volume massimo. $\left[\text{distanza fra le due basi } \frac{h}{3}\right]$

78 Si taglia una sfera di raggio unitario con due piani paralleli situati dalla stessa parte rispetto al centro O e distanti rispettivamente x e $2x$ da O; calcola il valore di x in modo che il segmento sferico delimitato da questi due piani abbia volume massimo. $\left[x = \frac{\sqrt{7}}{7}\right]$

79 Nel triangolo ABC rettangolo in B la somma dei cateti è ℓ. Sia V il volume del solido che si ottiene facendo ruotare ABC di una rotazione completa attorno ad una retta r passante per A e parallela a BC. Esprimi V in funzione della lunghezza dei cateti determinando, in particolare, il suo valore massimo e per quale lunghezza dei cateti si ottiene.

$\left[\text{posto } AB = x,\ V_{max} = \frac{8}{81}\pi\ell^3 \text{ per } x = \frac{2}{3}\ell\right]$

80 Sia M il punto medio del lato $\overline{AB} = \ell$ del triangolo equilatero ABC; preso un punto D nel lato AC, esprimi in funzione di $\overline{AD} = x$:

a. il perimetro del triangolo DMB

b. la somma dei quadrati di $\overline{MD}$ e $\overline{BD}$.

Determina per quali valori di x le due funzioni ottenute sono minime. $\left[\mathbf{a}.\ x = \frac{1}{3}\ell;\ \mathbf{b}.\ x = \frac{3}{8}\ell\right]$

81 Sull'arco della parabola di equazione $y = -x^2 + 2x$ che appartiene al primo quadrante, determina un punto P in modo che sia massimo il volume del solido che si ottiene da una rotazione completa del segmento PO intorno all'asse delle ascisse. $\left[P\left(\frac{6}{5}, \frac{24}{25}\right)\right]$

82 In un piano cartesiano ortogonale sono date la parabole P_1 e P_2 entrambe tangenti nell'origine O alla retta $y = 4x$ e passanti la prima per $A(-4, 0)$, la seconda per $B(-2, 0)$. Conduci per O una retta r che tagli ulteriormente P_1 e P_2 rispettivamente nei punti M e in N situati nel terzo quadrante; determina l'equazione di r in modo sia massima l'area del quadrilatero $MNM'N'$, essendo M' e N' le proiezioni di M e N sull'asse delle ascisse. $\left[y = \frac{4}{3}x\right]$

83 Una retta r parallela all'asse delle ascisse taglia l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ nei punti A e B; indicati con C e D i vertici dell'ellisse appartenenti all'asse x, determina l'equazione di r in modo che il trapezio $ABCD$ abbia area massima. $[y = \pm\sqrt{3}]$

84 Scrivi l'equazione della parabola $\Gamma : y = ax^2 + bx + c$ avente vertice nel punto $V(1, 1)$ e passante per l'origine O degli assi cartesiani; fra le rette per O che intersecano la parabola in un punto P del primo quadrante, determina:

a. quella per la quale è massima l'area del quadrilatero convesso avente i vertici nei punti O, V, P, A essendo A l'ulteriore punto di intersezione di Γ con l'asse delle ascisse

b. indicata con H la proiezione di P sull'asse y, quella per la quale è massimo il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il triangolo OPH di una rotazione completa attorno all'asse y.

Verifica che i due massimi si ottengono in corrispondenza della stessa retta.

$\left[\mathbf{a}.\ y = \frac{1}{2}x;\ \mathbf{b}.\ y = \frac{1}{2}x\right]$

85 Considerate le rette $r : y = 2$ e $s : y = 2x - 2$ che si intersecano in A, sia t la retta per l'origine degli assi cartesiani il cui coefficiente angolare m è compreso fra 0 e 2. Indicato con P il punto di intersezione di r e t e con Q quello di intersezione di s e t, determina per quale valore di m si ha che il prodotto $\overline{AQ} \cdot \overline{AP}$ è minimo. $[m = 1]$

86 Sia P un punto di ascissa positiva dell'iperbole equilatera $y = \frac{1}{x}$ e sia P' il suo simmetrico rispetto all'origine degli assi; detto A il punto in cui la retta per P tangente all'iperbole incontra l'asse x, determina le coordinate di P in modo che sia minima l'espressione $\overline{AP} + \overline{PP'}$. Esiste un punto P per il quale tale espressione è massima? [minimo in $P(1, 1)$; non esiste valore massimo]

87 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y che passa per l'origine e ha vertice nel punto $V(2, -4)$; detti A e B i suoi punti di intersezione con le rette $x = -1$ e $x = 6$, determina un punto P sull'arco AB di parabola in modo che la distanza di P dalla retta AB sia massima. In corrispondenza di un tale P, che cosa puoi dire dell'area del triangolo ABP? $\left[P\left(\frac{5}{2}, -\frac{15}{4}\right)\right]$

88 Data la circonferenza di centro $C(4, 0)$ e passante per l'origine, siano B la sua ulteriore intersezione con l'asse delle ascisse e P un punto dell'arco OB di ordinata positiva; la retta tangente in P alla circonferenza interseca l'asse y in H. Costruisci la funzione che esprime il rapporto fra l'area del quadrilatero $OBPH$ e l'area del quadrato di lato OH e verifica che il minimo si ottiene in corrispondenza di una delle posizioni limite del punto P. [minimo per $P \equiv B$]

89 Sia P un punto appartenente alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Traccia la perpendicolare alla bisettrice passante per P e siano M ed N i punti di intersezione di tale retta con la parabola di equazione $y = x^2 + 1$ (con N interno al segmento PM). Determina le coordinate di P in modo tale che sia minima la lunghezza del segmento PN. $\left[P\left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right)\right]$

90 Sono date la parabola di equazione $y = ax^2 + 3x$ e l'iperbole equilatera di equazione $xy = b$; determina i valori dei parametri a e b in modo che le due curve si intersechino nel punto $A(1, 4)$. Verifica inoltre che esse si intersecano in un ulteriore punto B e che in tale punto sono tangenti. Una retta r parallela alla corda AB interseca la parabola nei punti M e N, l'iperbole nei punti P e Q. Esprimi, in funzione dell'ordinata all'origine q della retta r le misure dei segmenti MN e PQ e determina per quale valore di q il rapporto $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{PQ}}$ è massimo.

$\left[\overline{MN} = \sqrt{5(4q+1)};\ \overline{PQ} = \frac{1}{2}\sqrt{5(q^2+32)};\ \text{massimo in } q = \frac{3\sqrt{57}-1}{4}\right]$

91 Date le due curve di equazioni $x^2 + y^2 = 6$ e $x = y^2$, sia A il loro punto di intersezione che appartiene al primo quadrante; le rette tangenti in A alle due curve intersecano l'asse x nei punti P e Q. Una retta r parallela a PQ interseca i lati del triangolo APQ nei punti R e S; determina l'equazione di r in modo che il triangolo PRS abbia area massima.

$\left[y = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

AREA 2: IL CALCOLO DIFFERENZIALE

4

LO STUDIO DI FUNZIONE

Per ricordare

★ Per studiare in modo completo una funzione $f(x)$ si deve:

- determinare il suo dominio
- stabilirne le eventuali periodicità e simmetrie
- studiare il comportamento agli estremi degli intervalli del dominio e trovare gli eventuali asintoti
- studiare il segno della funzione e determinare le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani
- trovare i punti di massimo e di minimo e studiare la crescenza e la decrescenza
- trovare i punti di flesso e studiare la concavità.

Occorre poi tenere presente che:

- tutte le equazioni e le disequazioni che si devono affrontare per gli studi dei segni della funzione e delle sue derivate devono essere risolte nell'ambito del dominio della funzione stessa
- conviene sempre evidenziare le eventuali periodicità, perché in questo caso è possibile studiare la funzione in un ambito più ristretto, e le simmetrie rispetto all'asse y o rispetto all'origine, perché in questo caso si può studiare la funzione solo per $x > 0$ (o per $x < 0$)
- il terzo e il quarto punto del precedente elenco possono anche essere invertiti, vale a dire che è indifferente studiare prima il comportamento della funzione agli estremi del dominio e poi il segno della funzione o viceversa
- a volte lo studio della derivata seconda è molto impegnativo e comporta calcoli laboriosi o confronti grafici non sempre immediati; in questi casi, qualora il comportamento della funzione fosse già chiaro dallo studio della derivata prima, si può omettere l'analisi della derivata seconda
- da ultimo ricordiamo che l'individuazione delle coordinate di qualche punto è spesso utile per costruire meglio il grafico della funzione e che a volte è opportuno usare un sistema dimetrico per evidenziarne le caratteristiche.

★ Tracciato il grafico C di una funzione $f(x)$, da esso si possono dedurre quelli di:

- $y = |f(x)|$ mediante una simmetria rispetto all'asse x delle parti negative di C
- $y = -f(x)$ mediante una simmetria rispetto all'asse x
- $y = f(x) + k$ mediante una traslazione di vettore $\vec{v}(0, k)$
- $y = f(x + h)$ mediante una traslazione di vettore $\vec{v}(-h, 0)$
- $y = f(|x|)$ mediante una simmetria rispetto all'asse y della sola parte di C che appartiene al semiasse positivo delle ascisse

Ricordiamo da ultimo le sostituzioni che devono essere eseguite nell'equazione della funzione $f(x)$ per trovare quella della sua corrispondente nelle principali isometrie:

- nella simmetria rispetto al punto di coordinate (a, b): $\begin{cases} x \to 2a - x \\ y \to 2b - y \end{cases}$
- nella simmetria rispetto alla retta $x = k$: $\begin{cases} x \to 2k - x \\ y \to y \end{cases}$
- nella simmetria rispetto alla retta $y = h$: $\begin{cases} x \to x \\ y \to 2h - y \end{cases}$
- nella simmetria rispetto alla retta $y = x$: $\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases}$
- nella simmetria rispetto alla retta $y = -x$: $\begin{cases} x \to -y \\ y \to -x \end{cases}$

ESERCIZI

Studia le seguenti funzioni e tracciane il relativo grafico (i grafici si trovano al termine dell'unità).

1 $y = (x^2 - 3x)\sqrt{x}$ $\left[m\left(\frac{9}{5}, -\frac{162\sqrt{5}}{125}\right); M(0, 0); F\left(\frac{3}{5}, -\frac{36\sqrt{15}}{125}\right)\right]$

2 $y = x\sqrt{\dfrac{3x-1}{3x+1}}$ $\left[\text{asintoto}: y = x - \frac{1}{3}; m\left(\frac{1}{3}, 0\right); M\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{6}, \approx -1{,}1\right); F\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)\right]$

3 $y = \dfrac{xe^x}{x-1}$ $\left[y = 0: \text{asintoto orizz. sx.}; M\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0{,}2\right), m\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \approx 13{,}2\right); F(\approx -1{,}27; \approx 0{,}16)\right]$

4 $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$
(Suggerimento: puoi riscrivere la funzione nella forma $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ e costruirne il grafico mediante particolari trasformazioni) $\left[M\left(\frac{\pi}{3}, 2\right), m\left(\frac{4}{3}\pi, -2\right)\right]$

5 $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ $\left[\text{asintoti}: y = -1 \text{ dx.}; x = 2 \text{ dx.}; M\left(4, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); F(\approx 6, \approx -0{,}7)\right]$

6 $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}$ $\left[\text{asintoti}: y = 1, x = 1; \text{sempre decrescente}; (0, -1) \text{ flesso a tangente verticale}; F\left(\frac{1}{8}, -3\right)\right]$

7 $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2}$ $\left[\text{simmetria rispetto asse } y; \text{asintoti}: y = 0, x = 0; (\pm 1, 0): \text{cuspidi}; M\left(\pm\sqrt{3}, \frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right); \text{quattro flessi di ascisse } \pm 0{,}9 \text{ e } \pm 2{,}5\right]$

8 $y = \sqrt{1 - x\sqrt{2x+3}}$ $\left[M(-1, \sqrt{2}); \text{ in } x = -\frac{3}{2} \text{ e } x = \frac{1}{2} \text{ tangente verticale}\right]$

9 $y = e^x\sqrt{x^2-2x}$

$\left[y=0: \text{asintoto orizz. sx.; } M\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \approx 0{,}7\right); \text{ in } x=0 \text{ e } x=2 \text{ tangenti verticali} \quad \text{flessi in } x=-1{,}48 \text{ e } x=2{,}17\right]$

10 $y = \frac{e^{\sqrt{x^2-1}}}{x^2}$

$\left[\text{crescente per } x>1; \text{ in } x=\pm 1 \text{ tangente verticale; } \left(\pm\sqrt{2}, \frac{e}{2}\right) \text{ flessi a tangente orizzontale}\right]$

11 $y = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\left[\text{in } x=0 \text{ discontinuità prima specie con salto 1; } x=\frac{1}{2} \text{ asintoto orizz. sempre crescente, in } x=0 \text{ tangente orizzontale}\right]$

12 $y = \ln\sqrt{\frac{4x+3}{4x-3}}$

$\left[y=0: \text{asintoto orizzontale; } x=\pm\frac{3}{4} \text{ asintoti verticali; nessun punto estremante} \quad x<-\frac{3}{4}: \text{concavità verso il basso; } x>\frac{3}{4} \text{ concavità verso l'alto}\right]$

13 $y = \frac{x-1}{x}\ln x$

$[m(1{,}0);\ F(\approx 1{,}81;\ \approx 0{,}27)]$

14 $y = \frac{x^3}{\ln x}$

$\left[x=1 \text{ asintoto verticale; } m\left(e^{\frac{1}{3}}, 3e\right), \text{ per } x\to 0^+ \text{ tangente orizzontale}\right]$

15 $y = \frac{x\ln x}{x+1}$

$[m(\approx 0{,}28;\ \approx -0{,}28); \text{ in } x=0 \text{ tangente verticale; } F(1,\ 0)]$

16 $y = \frac{x^2-\ln x}{x}$

$\left[y=x \text{ asintoto obliquo; } m(1{,}1),\ F\left(e\sqrt{e};\ \approx 4{,}15\right)\right]$

17 $y = \frac{x^2-2}{x} - 3\ln x$

$\left[x=0 \text{ asintoto verticale; } M(1,\ -1),\ m(2{,}1-3\ln 2),\ F\left(\frac{4}{3};\ \approx -1{,}03\right)\right]$

18 $y = x - \ln(x^2+2)$

$\left[\text{sempre crescente; } x=\pm\sqrt{2} \text{ punti di flesso}\right]$

19 $y = \arctan\frac{3x^2-1}{x^2+1}$

$\left[\text{simmetria rispetto all'asse } y;\ y=\arctan 3: \text{asintoto orizzontale; } m\left(0,\ -\frac{\pi}{4}\right),\ F\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0\right)\right]$

20 $y = x^2 + \arcsin x$

$\left[\text{sempre crescente; } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{2-\pi}{4}\right) \text{ flesso a tangente orizzontale; in } x=\pm 1 \text{ tangente verticale}\right]$

21 $y = x - \arctan\frac{1+x}{1-2x}$

$\left[x=\frac{1}{2} \text{ discontinuità di prima specie con salto } \pi;\ M\left(\frac{1-\sqrt{6}}{5};\ \approx -0{,}71\right),\ m\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5};\ \approx 2{,}04\right),\ F\left(\frac{1}{5};\ \approx -0{,}9\right)\right]$

Studia le seguenti funzioni e costruisci il relativo diagramma (i grafici si trovano al termine dell'unità).

22 $y = \sqrt{|x|} + x$

23 $y = \ln\left|\frac{2x}{x^2-1}\right|$

24 $y = x + |\ln|x||$

25 $y = \frac{x^2+x-6}{|x-2|+1}$

26 $y = \frac{x^2-|x|-2}{x-3}$

27 $y = \frac{(x+1)^3}{8|x|}$

28 $y = \dfrac{x^3 + x^2}{4(|x| - 1)}$

29 $y = e^x |x^2 - 1|$

30 $y = x|\ln x - 1|$

31 $y = \dfrac{|x| e^x}{2x - 1}$

32 $y = e^{x \ln |x|}$

33 $y = \dfrac{|x| \ln(x^2 + 1)}{x - 1}$

34 $y = x + \sqrt{|\sin x|}$

35 $y = \arccos \dfrac{|4 - x^2|}{2x}$

36 $y = \dfrac{1 + x^2}{|x - 2|} + \ln |x|$

37 $y = \dfrac{xe^x}{3|x| + 1}$

Per ciascuna delle seguenti funzioni, traccia il grafico di $f(x)$ e da esso deduci quelli richiesti.

38 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x$ **a.** $f(x-1)$ **b.** $f(|x|)$ **c.** $|f(x)|$

39 $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 1}$ **a.** $-|f(x)|$ **b.** $|f(x)| - 2$ **c.** $f(|x|)$

40 $f(x) = \sqrt{x - 2}$ **a.** $f(-x)$ **b.** $|f(x+1)|$ **c.** $|f(x) - 1|$

41 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ **a.** $2f(x) - 1$ **b.** $2f(2x)$ **c.** $|f(x) - 2|$

42 $f(x) = x^2 - 4x$ **a.** $e^{f(x)}$ **b.** $\ln f(x)$ **c.** $\sqrt{f(x)}$

43 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **a.** $e^{f(x)}$ **b.** $\ln f(x)$ **c.** $f'(x)$

44 $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ **a.** $e^{f(x)}$ **b.** $\ln f(x)$ **c.** $f'(x)$

45 $f(x) = x^3 - x^2$ **a.** $e^{f(x)}$ **b.** $\ln f(x)$ **c.** $f'(x)$

46 Ricordando che una funzione della forma $\dfrac{ax + b}{cx + d}$ rappresenta un'iperbole equilatera, traccia i grafici delle seguenti funzioni:

a. $f_1(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ **b.** $f_2(x) = \dfrac{1 - x}{1 + |x|}$

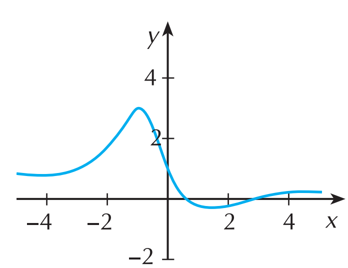
c. $f_3(x) = \dfrac{1 - |x|}{1 + x}$ **d.** $f_1(x) = \left|\dfrac{1 - x}{1 + x}\right|$

e. $f_1(x) = \left|\dfrac{1 - |x|}{1 + x}\right|$ **f.** $f_1(x) = \dfrac{1 - |x|}{1 + |x|}$

47 Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-\arctan x} - \sin(|x+1| - 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

il cui grafico è a lato, costruisci a partire da esso il grafico

di $g(x) = \dfrac{|e^{-\arctan x} - \sin(|x+1| - 1)|}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.



PROBLEMI SULLA COSTRUZIONE DI FUNZIONI

(I grafici di alcune funzioni sono al termine dell'unità)

48 Scrivi l'equazione della simmetrica della curva di equazione $y = \dfrac{x^2-3}{2x+1}$ rispetto al punto $P(1,\,-2)$, studiala e tracciane il grafico.

$\left[y = \dfrac{x^2-12x+21}{2x-5}\right]$

49 Studia la funzione di equazione $y = 4 - \sqrt{x^2+15x+55}$, tracciane il grafico e verifica poi che tale curva è simmetrica di quella di equazione $y = \sqrt{x^2-3x+1}$ rispetto al punto $P(-3,\,2)$.

50 Dopo aver studiato la funzione di equazione $y = x^3+6x^2+12x+9$ e averne costruito il grafico, verifica che essa è simmetrica rispetto al suo punto di flesso. Generalizza i risultati ottenuti dimostrando che le curve di equazione $y = ax^3+bx^2+cx+d$ sono sempre simmetriche rispetto al loro punto di flesso.

51 Sia $ABCD$ il trapezio rettangolo in B e C circoscritto a una circonferenza di raggio unitario; indicato con $2x$ l'angolo di vertice A, esprimi in funzione di x la misura del perimetro del trapezio e studia la sua variazione.

$\left[2p = \dfrac{2\tan^2 x\ +4\tan x+2}{\tan x}\right]$

52 Sull'arco AB di un settore circolare di centro O, raggio $r = 1$ e ampiezza $\dfrac{\pi}{2}$ prendi un punto P e traccia da esso la tangente all'arco AB che incontra la retta OA in un punto C. Posto $A\widehat{O}P = x$, esprimi in funzione di x il rapporto fra l'area del triangolo OPB e quella del triangolo OCP.

$\left[y = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right]$

53 È dato un cilindro di altezza h avente per base un cerchio di centro O e raggio $OA = r$; prendi un punto P su OA e traccia per esso la perpendicolare ad OA nel piano della base che interseca la circonferenza in B e C. Studia la variazione del volume e della superficie totale del prisma di altezza h avente per base il triangolo BCO in funzione della distanza di BC da O, determinando, in particolare, quando essi assumono il valore massimo.

$\left[V = hx\sqrt{r^2-x^2},\ V_{max} \text{ per } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}r;\ S = 2(x+h)\sqrt{r^2-x^2}+2rh,\ S_{max} \text{ per } x = \dfrac{\sqrt{h^2+8r^2}-h}{4}\right]$

54 I centri O e O' di due circonferenze esterne distano fra loro di un segmento lungo $4a$ ed i loro raggi sono rispettivamente a e $2a$. Da un punto P appartenente a OO' ed esterno alle due circonferenze si conducono le rette ad esse tangenti che incontrano la prima in A e B, la seconda in C e D. Posto $\overline{OP} = x$, esprimi in funzione di x:

a. la somma dei segmenti di tangente $\overline{PA}+\overline{PC}$;

b. la somma delle aree delle due calotte che si ottengono facendo ruotare i minori degli archi AB e CD attorno alla retta dei centri.

Posto $a = 1$, studia le due funzioni ottenute relativamente alle limitazioni imposte dal problema determinando, in particolare, la posizione del punto P per la quale esse sono massime.

$\left[\begin{array}{l} \textbf{a}.\ y = \sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2-8ax+12a^2},\ \text{massimo per } x = \dfrac{4}{3}; \\ \textbf{b}.\ y = 2\pi a^2\cdot\dfrac{5x^2-13ax+4a^2}{x(x-4a)},\ \text{massimo per } x = \dfrac{8\sqrt{2}-4}{7} \end{array}\right]$

55 Una circonferenza di raggio $r = 2$ e centro O è tangente esternamente in C ad una seconda circonferenza di centro O' e raggio x variabile; una delle tangenti comuni non passante per C incontra le due circonferenze in P e Q. Studia, al variare del raggio della seconda circonferenza, la funzione che esprime l'area del quadrilatero $POO'Q$.

$\left[y = (2+x)\sqrt{2x}\right]$

56 Data una circonferenza di centro O e raggio 2, sia $ABCDEF$ l'esagono regolare in essa inscritto; su ciascun lato nello stesso verso considera i segmenti AA', BB', CC', DD', EE', FF' tutti di lunghezza x. Studia come varia il rapporto fra l'area di $ABCDEF$ e quella di $A'B'C'D'E'F'$ al variare di x.
$\left[y = \frac{4}{x^2 - 2x + 4}\right]$

57 Dato il triangolo ABC isoscele di base AC, sia $\overline{AB} = 1$ e $\widehat{BAC} = \alpha$; costruisci sul lato BC un altro triangolo isoscele BDC di base BC dove $\widehat{DBC} = \alpha$. Calcola, in funzione di α, il perimetro del quadrilatero $ABDC$ e studia la funzione così ottenuta determinando, in particolare, quando il perimetro è minimo.
$\left[y = \frac{2\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1}{\cos\alpha};\ \text{minimo per } \alpha = \frac{\pi}{4}\right]$

58 E' dato un settore circolare AOB di ampiezza $\frac{\pi}{2}$ e raggio r; sia P un punto dell'arco AB. Prolunga il raggio OP di un segmento PQ congruente al raggio e traccia da Q la perpendicolare alla retta del raggio OA che la incontra in Q'. Esprimi in funzione dell'angolo $\widehat{AOP} = x$ l'area $f(x)$ del pentagono mistilineo $OBPQQ'$ e studia la funzione di equazione $y = f(x)$; deduci poi dal grafico ottenuto quello di $y = \ln|f(x)|$.
$\left[y = r^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + 2\sin 2x\right)\right]$

59 Un rombo $ABCD$ è formato da due triangoli equilateri di lato 5cm; una retta r parallela alla diagonale maggiore BD interseca i lati AB e AD rispettivamente in P e in Q. Il segmento PQ, in una rotazione completa attorno alla retta BD genera un cilindro; trova l'espressione della funzione $f(x)$ che esprime il rapporto fra l'area della superficie laterale di tale cilindro e quella della sua superficie di base in funzione della distanza x della retta r dalla diagonale BD e studiane l'andamento.
$\left[y = \frac{2\sqrt{3}(5 - 2x)}{x}\right]$

60 Un cono di raggio 1 e altezza 5 viene tagliato con un piano parallelo alla base; nel tronco di cono così ottenuto, inscrivi un altro cono avente per base la base minore di tale tronco. Posto uguale a x il raggio di base del cono inscritto, trova la funzione $f(x)$ che descrive il rapporto tra il volume del cono inscritto e quello del tronco di cono e costruiscine il grafico, indipendentemente dalle limitazioni imposte dal problema.
$\left[y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}\right]$

61 Sia $ABCD$ un trapezio isoscele inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2$; posto $\widehat{DAB} = x$, costruisci:

a. la funzione che esprime il perimetro del trapezio;

b. la funzione che esprime il rapporto fra il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il trapezio di una rotazione completa attorno alla retta del diametro e il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il trapezio attorno alla retta della base minore.

Studia le funzioni ottenute e costruiscine il grafico indipendentemente dalle limitazioni imposte dal problema.
$\left[y = 4(1 + \cos x - \cos^2 x);\ y = \frac{3 - 4\cos^2 x}{3 - 2\cos^2 x}\right]$

62 Di un triangolo ABC si sa che $\overline{AB} = x - 4$, $\overline{AC} = 7 - x$, $\overline{BC} = 1$; dopo aver stabilito per quali valori di x il triangolo esiste, studia e rappresenta graficamente la funzione di equazione $y = \frac{1}{AH} + \frac{1}{BK} + \frac{1}{CR}$ dove AH, BK, CR sono le altezze del triangolo determinando, in particolare, quando essa assume il suo valore minimo. $\left[5 < x < 6;\ y = \frac{2}{\sqrt{-2x^2 + 22x - 60}}\ \text{minimo in } x = \frac{11}{2}\right]$

63 Un cubo di lato unitario ha un foro centrale a forma di cilindro. Esprimi la superficie totale del solido in funzione del raggio di base x del cilindro; detta $f(x)$ la funzione ottenuta, studia quella di equazione $y = \arctan f(x)$ indipendentemente dalle limitazioni imposte dal problema.
$[f(x) = 6 - 2\pi x - 2\pi x^2]$

64 In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sono dati il punto $A(1, 0)$, un punto P che appartiene alla bisettrice del primo e terzo quadrante e la retta $r : y = 2x - 1$; determina, al variare di P sulla bisettrice, come varia la funzione $f(x)$ che esprime il rapporto fra la distanza del punto P dalla retta r e dal punto A, determinandone in particolare il massimo ed il minimo assoluti ed il comportamento per $P \to \infty$.
$\left[f(x) = \dfrac{|1-x|}{\sqrt{5(2x^2-2x+1)}};\ \lim\limits_{P\to\infty} f(x) = \dfrac{\sqrt{10}}{10}\right]$

65 Date le parabole di equazioni $y = x^2 - 3x + 2$ e $y = -x^2 + x + 2$, siano AB e CD le corde individuate rispettivamente su di esse dalla retta $y = k$. Determina e studia, in funzione di k, le funzioni che hanno le seguenti equazioni:

a. $y = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ $\left[y = \dfrac{\sqrt{1+4k}}{\sqrt{9-4k}}\right]$

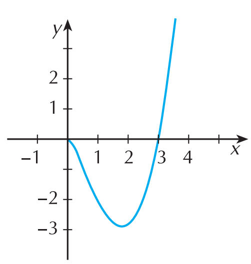
b. $y = \overline{AB} + \overline{CD}$. $\left[y = \sqrt{1+4k} + \sqrt{9-4k}\right]$

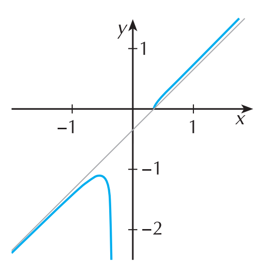
66 In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, considera la circonferenza di centro O e raggio 2. Su di essa e nel semipiano delle ordinate non negative, prendi un punto P e siano PH e PK le sue distanze dall'asse y e dall'asse x rispettivamente. Studia e rappresenta graficamente la funzione di equazione $y = \dfrac{\overline{PH}}{\overline{PK}}$ e verifica che essa non è superiormente limitata.
$\left[y = \dfrac{|x|}{\sqrt{4-x^2}}\right]$

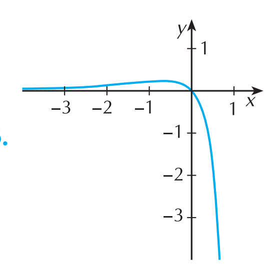
67 In un sistema di assi cartesiani ortogonali sono dati i punti $A(k, 0)$ e $B(7, 0)$ e la retta r di equazione $y = 2x + 1$; sia C il punto di intersezione di r con la retta ortogonale all'asse delle ascisse e passante per A. Posto $\widehat{ACB} = \alpha$, calcola l'espressione di α in funzione di k e studia la funzione $\alpha = f(k)$ così ottenuta.
$\left[\alpha = \arctan \dfrac{|k-7|}{|2k+1|}\right]$

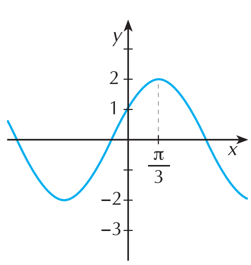
68 Date le funzioni $y = \ln x$ e $y = x$, siano P un punto della prima e Q un punto della seconda aventi la stessa ordinata; indicati con P' e Q' le proiezioni di P e Q sull'asse delle ascisse, esprimi l'area $f(k)$ del rettangolo $PP'Q'Q$ in funzione dell'ascissa k del punto P e studia la funzione di equazione $y = f(k)$. $[y = |\ln k|(k - \ln k)]$

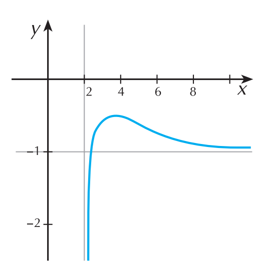
Risultati di alcuni esercizi.

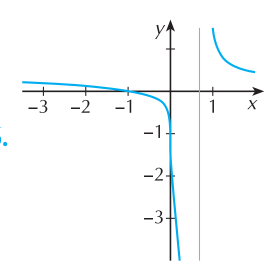
1.


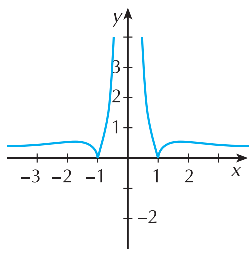
2.


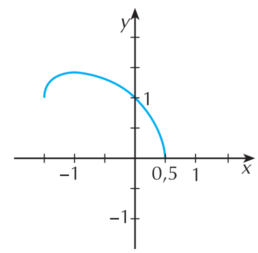
3.


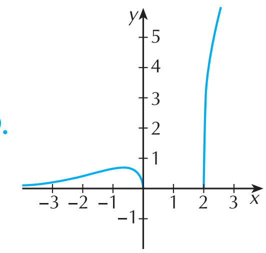
4.


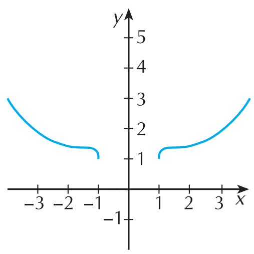
5.


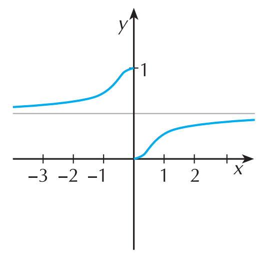
6.


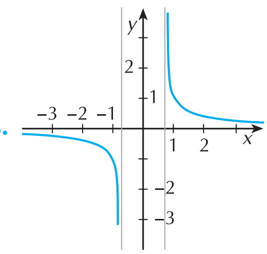
7.


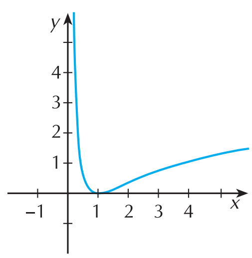
8.


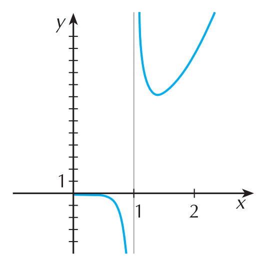
9.


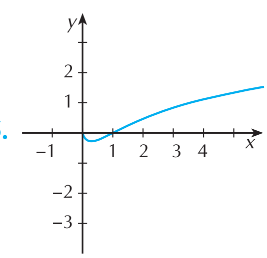
10.


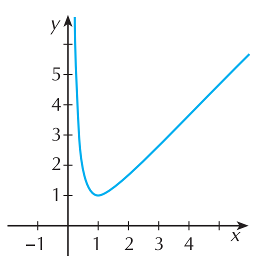
11.


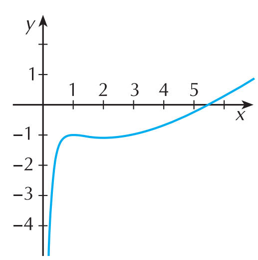
12.


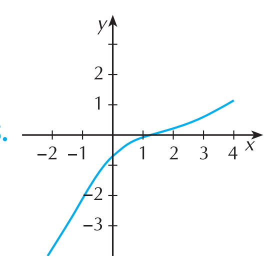
13.


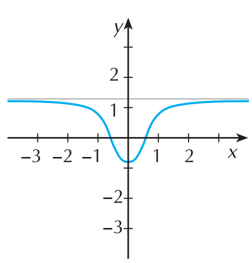
14.


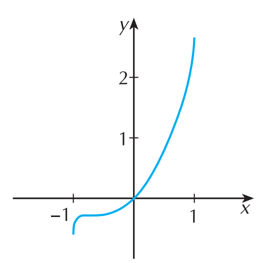
15.


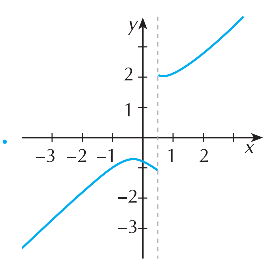
16.


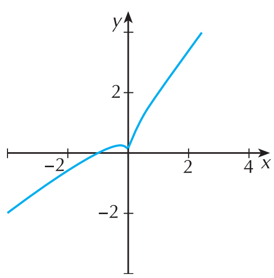
17.


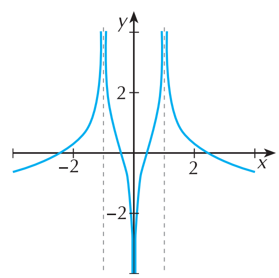
18.


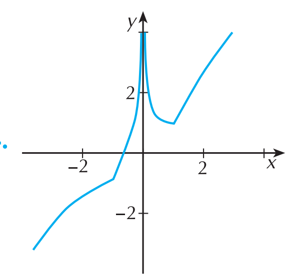
19.


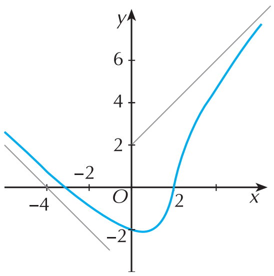
20.


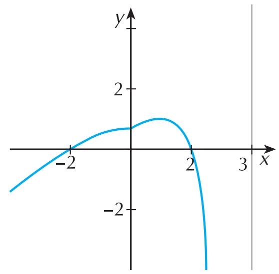
21.


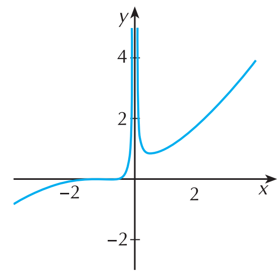
22.


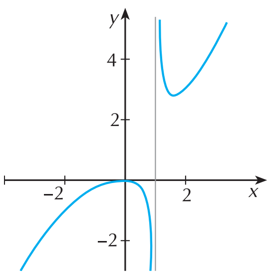
23.


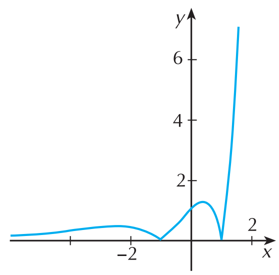
24.


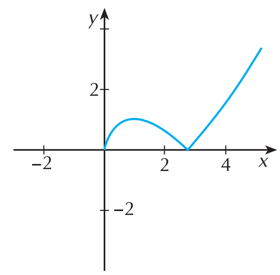
25.


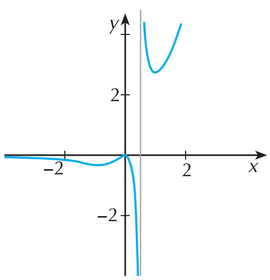
26.


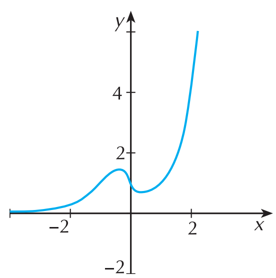
27.


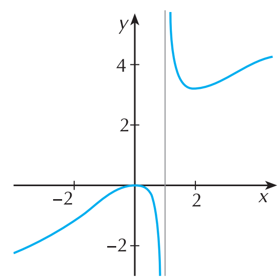
28.


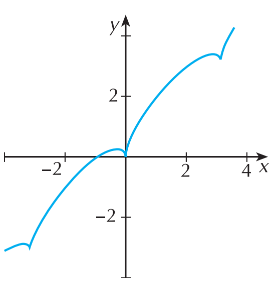
29.


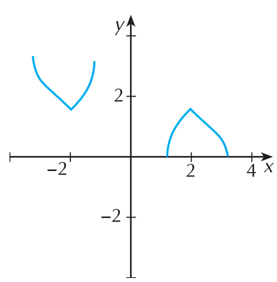
30.


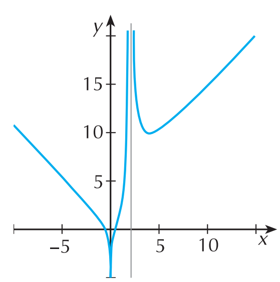
31.


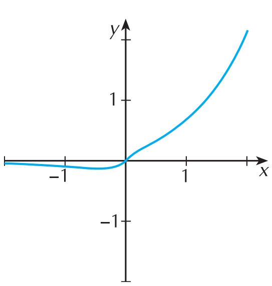
32.


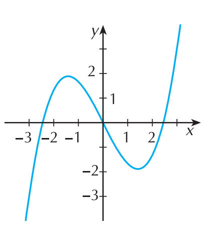
33.


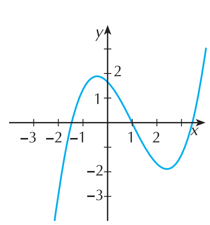
34.


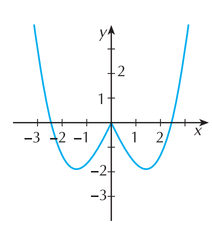
35.


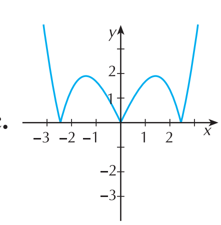
36.


37.


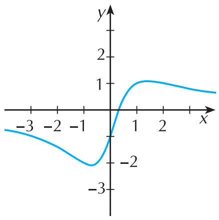
38.


a.


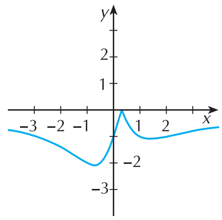
b.


c.


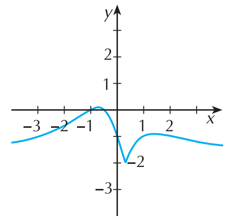
39.



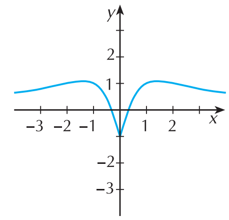
a.



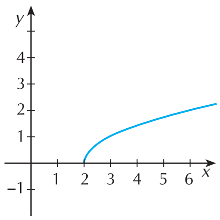
b.



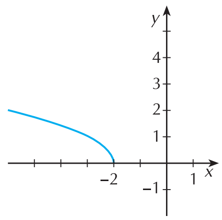
c.



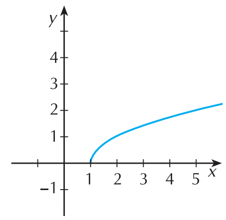
40.



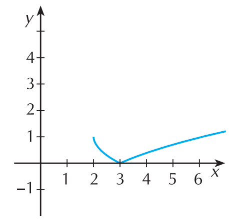
a.



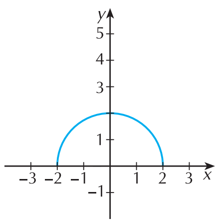
b.



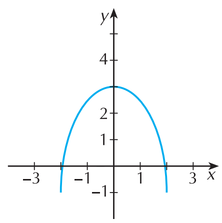
c.



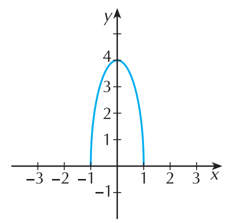
41.



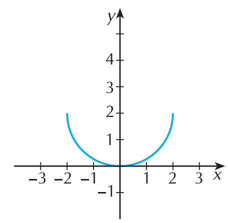
a.



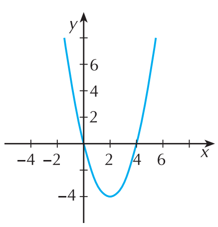
b.



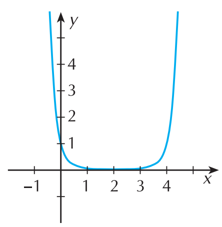
c.



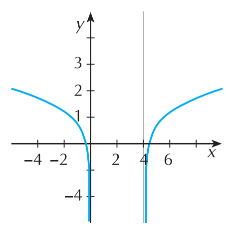
42.



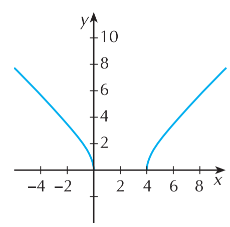
a.



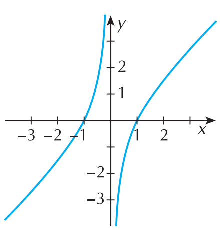
b.



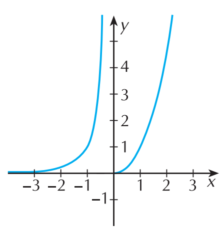
c.



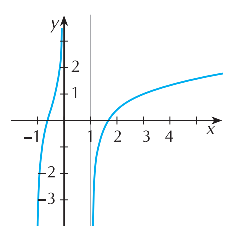
43.



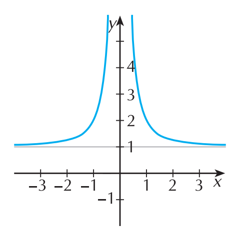
a.



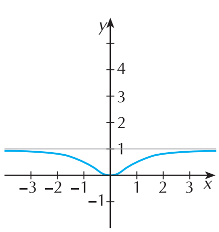
b.



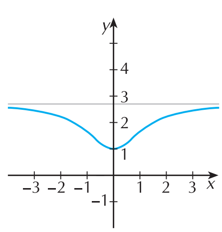
c.



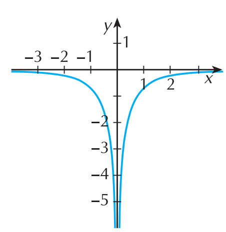
44.



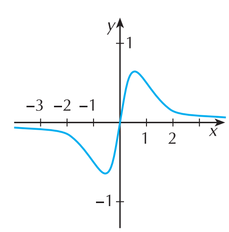
a.



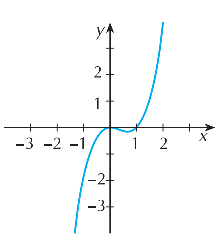
b.



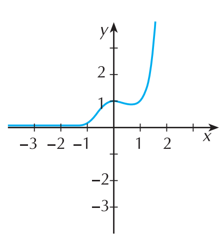
c.



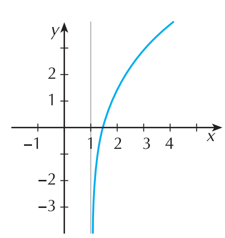
45.



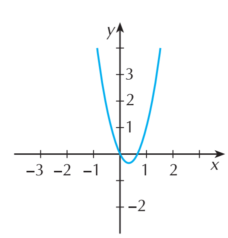
a.



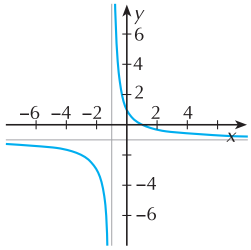
b.



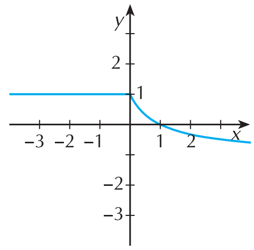
c.



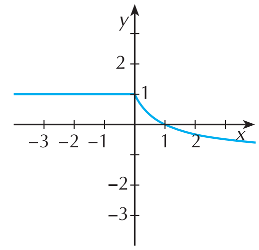
46. a.



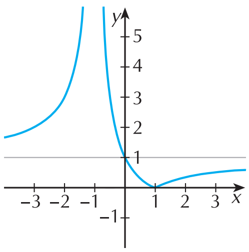
b.



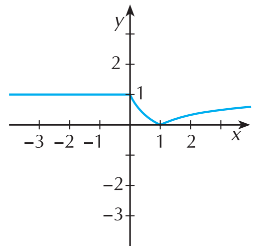
c.



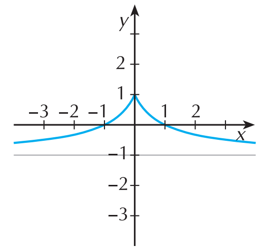
d.



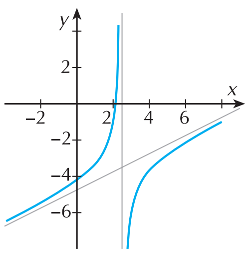
e.



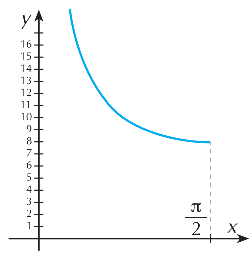
f.



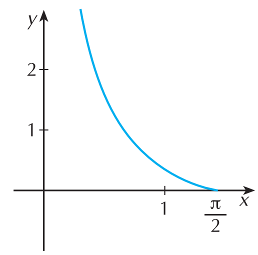
48.



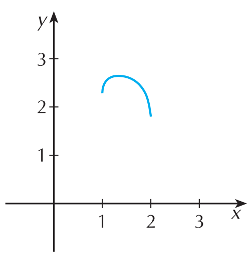
51.



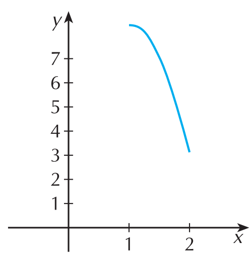
52.



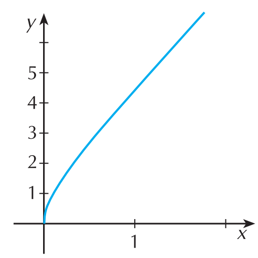
54. a.



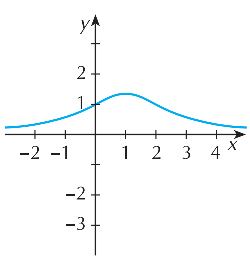
b.



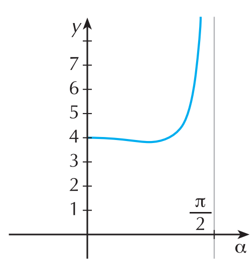
55.



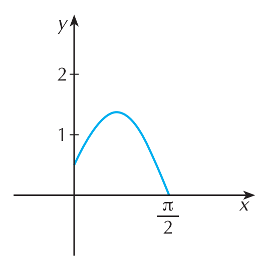
56.



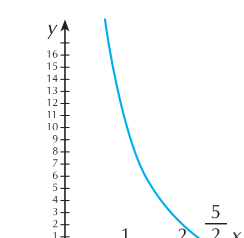
57.



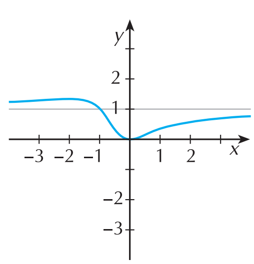
58.



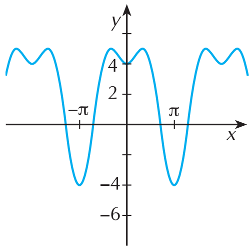
59.



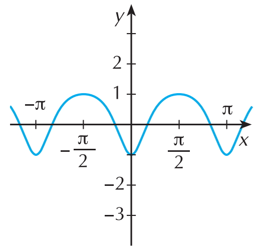
60.



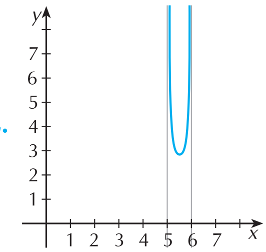
61. **a.**



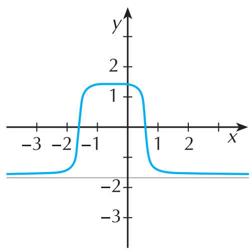
b.



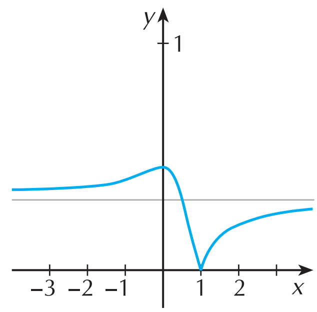
62.



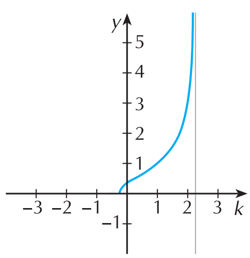
63.



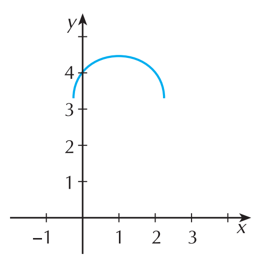
64.



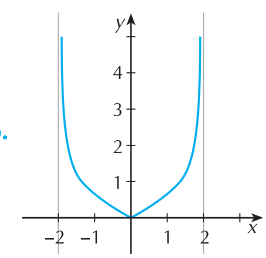
65. **a.**



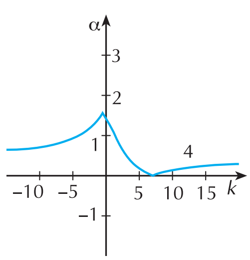
b.



66.



67.



68.