# APPROFONDIMENTO

## La divisione fra polinomi con più di una variabile

Se un polinomio è funzione di due o più variabili, bisogna sempre specificare rispetto a quale lettera si vuole eseguire la divisione; vediamo un esempio.

$(10a^2y+9a^3+6ay^2+4y^3):(-ay+2y^2+3a^2)$.

Se consideriamo la lettera $y$ come variabile, dovremo ordinare i polinomi rispetto a tale lettera.

$$\begin{array}{r|l}
4y^3+6ay^2+10a^2y+9a^3 & 2y^2-ay+3a^2 \\ \cline{2-2}
-4y^3+2ay^2-6a^2y & 2y+4a \\ \hline
+8ay^2+4a^2y+9a^3 & \\
-8ay^2+4a^2y-12a^3 & \\ \hline
+8a^2y-3a^3 &
\end{array}$$

Quindi $Q(y)=2y+4a \qquad R(y)=8a^2y-3a^3$

La divisione si arresta perché il grado dell'ultimo resto parziale è minore di quello del polinomio divisore (rispetto a $y$, grado del resto 1, grado del divisore 2). Se eseguiamo la divisione rispetto alla lettera $a$ troviamo:

$$\begin{array}{r|l}
9a^3+10a^2y+6ay^2+4y^3 & 3a^2-ay+2y^2 \\ \cline{2-2}
-9a^3+3a^2y-6ay^2 & 3a+\dfrac{13}{3}y \\ \hline
+13a^2y+4y^3 & \\
-13a^2y+\dfrac{13}{3}ay^2-\dfrac{26}{3}y^3 & \\ \hline
\dfrac{13}{3}ay^2-\dfrac{14}{3}y^3 &
\end{array}$$

Quindi $Q(a)=3a+\dfrac{13}{3}y \qquad R(a)=\dfrac{13}{3}ay^2-\dfrac{14}{3}y^3$

Osserviamo che il quoziente e il resto della divisione sono diversi nei due casi.
Il polinomio dato si può quindi scrivere in uno qualsiasi dei seguenti modi:

$$10a^2y+9a^3+6ay^2+4y^3=\begin{cases}(2y+4a)(2y^2-ay+3a^2)+8a^2y-3a^3\\[2ex] \left(3a+\dfrac{13}{3}y\right)(3a^2-ay+2y^2)+\dfrac{13}{3}ay^2-\dfrac{14}{3}y^3\end{cases}$$

In generale, eseguendo la divisione rispetto a variabili diverse si ottengono quozienti e resti che sono diversi. Solo se il resto è zero i due quozienti sono uguali, anche se appaiono ordinati in modo diverso:

$$\begin{array}{r|l}
x^3-6x^2y+11xy^2-6y^3 & x-2y \\ \cline{2-2}
-x^3+2x^2y & x^2-4xy+3y^2 \\ \hline
-4x^2y+11xy^2-6y^3 & \\
+4x^2y-8xy^2 & \\ \hline
3xy^2-6y^3 & \\
-3xy^2+6y^3 & \\ \hline
0 & Q(x)=x^2-4xy+3y^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
-6y^3+11xy^2-6x^2y+x^3 & -2y+x \\ \cline{2-2}
+6y^3-3xy^2 & 3y^2-4xy+x^2 \\ \hline
8xy^2-6x^2y+x^3 & \\
-8xy^2+4x^2y & \\ \hline
-2x^2y+x^3 & \\
+2x^2y-x^3 & \\ \hline
0 & Q(y)=3y^2-4xy+x^2
\end{array}$$

*Esegui le seguenti divisioni esatte fra polinomi a coefficienti letterali.*

**1** ESERCIZIO GUIDATO

$(4x^3 + b^2x + b^3) : (2x + b)$

$$
\begin{array}{rrr|l}
4x^3 & & +b^2x+b^3 & 2x+b \\
\cline{4-4}
-4x^3 & -2bx^2 & & 2x^2-bx+b^2 \\
\cline{1-3}
& -2bx^2 & +b^2x+b^3 & \\
& +2bx^2 & +b^2x & \\
\cline{2-3}
& & 2b^2x+b^3 & \\
& & -2b^2x-b^3 & \\
\cline{3-3}
& & 0 &
\end{array}
$$

In definitiva: $Q(x) = 2x^2 - bx + b^2$

**2** $\left(\frac{3}{2}m^3v + m^4 + v + \frac{1}{2}m^2v^2 + mv^3\right) : (m + v)$ $\left[Q(m) = m^3 + \frac{1}{2}m^2v + v^3\right]$

**3** $(x^4 - 3ax^3 - 2a^2x^2 + 9a^3x - 3a^4) : (x^2 - 3a^2)$ $[Q(x) = x^2 - 3ax + a^2]$

**4** $(a^5 - 4a^4 + 6a^3 - 9a^2 + 14a - 8) : (a^2 - 3a + 2)$ $[Q(a) = a^3 - a^2 + a - 4]$

**5** $(6x^4 - 19x^3y + 12x^2y^2 - 7xy^3 + 5y^4) : (2x - 5y)$ $[Q(x) = 3x^3 - 2x^2y + xy^2 - y^3]$

**6** $[x^3 + 2x^2 - (a^2 - 6a + 2)x - 2a^2 + 5a + 3] : (x - a + 3)$ $[Q(x) = x^2 + (a - 1)x + 2a + 1]$

**7** $(3x^4 - 9ax^3 + 11a^2x^2 + 3a^3x - 4a^4) : (3x^2 - a^2)$ $[Q(x) = x^2 - 3ax + 4a^2]$

*Determina il quoziente ed il resto delle seguenti divisioni rispetto ad ognuna delle lettere che vi compaiono. Verifica che, se la divisione non è esatta, i quozienti ed i resti sono diversi.*

**8** $(6a^3 - 17a^2b + 14ab^2 - 3b^3) : (2a - 3b)$ $[Q = 3a^2 - 4ab + b^2]$

**9** $\left(4x^3 + \frac{2}{3}xy^2 + \frac{1}{6}y^3\right) : \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y\right)$ $\left[\begin{array}{l} Q(x) = 6x^2 - \frac{3}{2}xy + \frac{11}{8}y^2,\ R(x) = -\frac{3}{48}y^3; \\ Q(y) = y^2,\ R(y) = 4x^3 \end{array}\right]$

**10** $(2x^4 - 3ax^3 - 6a^2x^2 + 5a^3x + a^4) : (x^2 - 2a^2)$ $\left[\begin{array}{l} Q(x) = 2x^2 - 3ax - 2a^2,\ R(x) = -a^3x - 3a^4; \\ Q(a) = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{5}{2}ax + \frac{11}{4}x^2,\ R(a) = -\frac{1}{2}ax^3 - \frac{3}{4}x^4 \end{array}\right]$

**11** $\left(2v^4 - 2v^3t + v^3 + \frac{13}{2}v^2t^2 - 3vt^3 - \frac{1}{2}v^2t + 3vt^2\right) : (2v - t + 1)$ $\left[Q = v^3 - \frac{1}{2}v^2t + 3vt^2\right]$

**12** $(2p^3 - 4p^2m + 3pm^2 - m^3) : (2p^2 - 3pm + m^2)$ $\left[\begin{array}{l} Q(p) = p - \frac{1}{2}m,\ R(p) = \frac{1}{2}pm^2 - \frac{1}{2}m^3; \\ Q(m) = -m,\ R(m) = -2mp^2 + 2p^3 \end{array}\right]$

**13** $(y^5 - 4ty^4 + 6t^2y^3 - 8t^3y^2 + 5t^4y - t^5) : (y^2 - 3ty + t^2)$ $[Q = y^3 - ty^2 + 2t^2y - t^3]$

**14** $(3y^3 - 4y^2x + x^3) : (2y^2 - x^2)$ $\left[\begin{array}{l} Q(y) = \frac{3}{2}y - 2x,\ R(y) = \frac{3}{2}x^2y - x^3; \\ Q(x) = -x,\ R(x) = -2xy^2 + 3y^3 \end{array}\right]$

**15** $\left(\frac{3}{5}r^4 - \frac{9}{5}r^3x + \frac{167}{15}r^2x^2 + \frac{14}{3}rx^3 - 4x^4\right) : (3r^2 + rx - x^2)$ $\left[Q = \frac{1}{5}r^2 - \frac{2}{3}rx + 4x^2\right]$

**16** $\left(\frac{1}{2}a^6 + a^5b - 2a^3b^3 + b^6\right) : (a^4 + a^2b^2 - 2b^4)$

$$\left[\begin{array}{l} Q(a) = \frac{1}{2}a^2 + ab - \frac{1}{2}b^2,\ R(a) = -3a^3b^3 + \frac{3}{2}a^2b^4 + 2ab^5; \\ Q(b) = -\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}a^2,\ R(b) = -2a^3b^3 + \frac{3}{4}a^4b^2 + a^5b + \frac{3}{4}a^6 \end{array}\right]$$