La regola di Cartesio e il segno delle radici

Data un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ in cui $\Delta \geq 0$, è possibile stabilire, senza risolverla, quale sia il segno assunto dalle sue radici solo osservando come variano i suoi coefficienti.

I esempio. Consideriamo l'equazione $3x^2 - x - 2 = 0$.

Il suo discriminante è positivo $(\Delta = 25)$ e quindi le soluzioni sono reali. Sappiamo che, in un'equazione di secondo grado, il prodotto delle soluzioni è dato da $\frac{c}{a}$ mentre la somma da $-\frac{b}{a}$. Nel nostro caso abbiamo $\frac{c}{a} = -\frac{2}{3}$ $\quad -\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$.

Quindi, essendo il prodotto delle soluzioni negativo, esse saranno di segno discorde, cioè una positiva e l'altra negativa. Inoltre, essendo la loro somma positiva, possiamo affermare che, delle due, quella maggiore in valore assoluto è la positiva.

II esempio. Consideriamo l'equazione $-3x^2 + 10x - 3 = 0$.

Le soluzioni sono ancora reali $\left(\frac{\Delta}{4} = 16\right)$. Il loro prodotto è $\frac{c}{a} = 1$ e la loro somma $-\frac{b}{a} = \frac{10}{3}$.

Allora, essendo il prodotto delle soluzioni positivo, esse saranno di segno concorde, entrambe positive oppure entrambe negative. La somma è però positiva; dobbiamo perciò concludere che le soluzioni di questa equazione sono entrambe positive.

ESERCIZI

Dopo avere verificato che le seguenti equazioni ammettono soluzioni reali, determina il loro segno con il procedimento illustrato sopra.

1 $2x^2 - 7x + 5 = 0$

2 $3x^2 - 7x - 6 = 0$

3 $3x^2 - 5x - 2 = 0$

4 $4x^2 + 5x + 1 = 0$

5 $10x^2 - 17x + 3 = 0$

6 $2x^2 - 5x - 3 = 0$

7 $3x^2 - 5x + 2 = 0$

8 $x^2 - 4x - 1 = 0$

9 $5x^2 - 8x + 2 = 0$

10 $3x^2 + x - 4 = 0$

11 $\frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$

12 $x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = 0$

13 $\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 = 0$

14 $4x^2 + \frac{7}{6}x - 1 = 0$

Come hai visto osservando gli esempi e svolgendo gli esercizi, il segno delle soluzioni di un'equazione di secondo grado ridotta in forma normale e con un discriminante non negativo, dipende solo dal segno dei suoi coefficienti a, b, c. Vogliamo ora generalizzare quanto visto e cercare di ricavare da queste osservazioni una regola generale.

Consideriamo dunque un'equazione del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

che abbia soluzioni reali, il cui discriminante sia cioè non negativo. Possiamo supporre che il coefficiente a sia positivo, perché se non lo fosse basterebbe cambiare tutti i segni dell'equazione. In tale ipotesi le possibili combinazioni di segni dei tre coefficienti e conseguentemente i valori $\frac{c}{a}$ e $-\frac{b}{a}$ sono:

	a	b	c	$\frac{c}{a}$	$-\frac{b}{a}$
1° caso	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
2° caso	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
3° caso	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
4° caso	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

Analizziamo i singoli casi:

1. Il prodotto delle soluzioni è positivo, quindi esse sono di segno concorde, entrambe positive oppure entrambe negative. Poiché la loro somma è negativa, possiamo concludere che esse sono entrambe negative.
2. Il prodotto delle soluzioni è positivo, quindi il loro segno è concorde; anche la loro somma è positiva e quindi possiamo concludere che le soluzioni sono entrambe positive.
3. Il prodotto delle soluzioni è negativo e perciò esse sono di segno discorde, una positiva e l'altra negativa; essendo la loro somma negativa, lo sarà anche la soluzione con valore assoluto maggiore.
4. Il prodotto delle soluzioni è negativo e perciò esse hanno segno discorde; la loro somma è invece positiva e quindi sarà positiva anche la soluzione con valore assoluto maggiore.

Facciamo ora una convenzione; diremo che passando ordinatamente da un coefficiente all'altro si ha una **permanenza** di segno se i due numeri sono concordi, diremo che si ha una **variazione** di segno se i due numeri sono discordi.
Riassumendo l'analisi dei casi in una tabella in cui riportiamo in evidenza le permanenze (p) e le variazioni (v) di segno nel passare da un coefficiente all'altro, possiamo concludere che

	a		***b***		***c***	
1° caso	$+$	P	$+$	P	$+$	2 permanenze $\rightarrow$ 2 soluzioni negative
2° caso	$+$	V	$-$	V	$+$	2 variazioni $\rightarrow$ 2 soluzioni positive
3° caso	$+$	P	$+$	V	$-$	1 permanenza 1 variazione $\rightarrow$ 1 sol. negativa 1 sol. positiva
4° caso	$+$	V	$-$	P	$-$	1 variazione 1 permanenza $\rightarrow$ 1 sol. positiva 1 sol. negativa

Possiamo quindi associare le permanenze alla presenza di soluzioni negative e le variazioni alla presenza di soluzioni positive, enunciando la seguente Regola di Cartesio.

In una equazione di secondo grado con soluzioni reali, ad ogni permanenza di segno corrisponde una soluzione negativa, ad ogni variazione una soluzione positiva.

Se le soluzioni sono discordi, è maggiore in valore assoluto quella positiva se la variazione precede la permanenza, quella negativa se la permanenza precede la variazione.

Esempio: $3x^2 - 4x + 1 = 0$ $\qquad \dfrac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1$ le soluzioni sono reali

a		***b***		***c***
	V		V	
3		−4		1

2 variazioni → 2 soluzioni positive.

ESERCIZI

Applicando la regola di Cartesio, determina il segno delle soluzioni delle seguenti equazioni.

15 $6x^2 + 5x - 6 = 0$

16 $4x^2 - 5x + 1 = 0$

17 $14x^2 + 15x - 9 = 0$

18 $10x^2 - 9x - 1 = 0$

19 $10x^2 + 11x + 1 = 0$

20 $11x^2 - 12x + 1 = 0$

21 $21x^2 + 10x + 1 = 0$

22 $4x^2 + 2x - 12 = 0$

23 $5x^2 + 6x - 11 = 0$

24 $6x^2 - 8x + 1 = 0$

25

ESERCIZIO GUIDATO

$x^2 - (m+1)x + m + \dfrac{1}{4} = 0$

In questo caso, essendo l'equazione letterale, dobbiamo procedere ad analizzare il segno del discriminante e quello dei coefficienti dell'equazione al variare di m in R.

$$\Delta = (m+1)^2 - 4\left(m + \frac{1}{4}\right) = m^2 + 2m + 1 - 4m - 1 = m^2 - 2m$$

Affinché le soluzioni siano reali deve essere $m^2 - 2m \geq 0$ che risolta dà $m \leq 0 \ \vee \ m \geq 2$

segno di a positivo $\forall m \in R$

segno di b positivo se $-(m+1) > 0$ cioè $m < -1$

segno di c positivo se $m + \dfrac{1}{4} > 0$ cioè $m > -\dfrac{1}{4}$

Riportiamo i risultati ottenuti in una tabella riassuntiva

		-1		$-\frac{1}{4}$		0		2	
segno di Δ	+		+		+	•	−	•	+
segno di a	+		+		+		+		+
segno di b	+	•	−		−		−		−
segno di c	−		−	•	+		+		+

Eliminato l'intervallo $0 < m < 2$ in cui non ci sono soluzioni reali, analizziamo ogni intervallo:

$m < -1$	a è positivo, b è positivo, c è negativo; abbiamo una permanenza e una variazione, quindi una soluzione positiva e una negativa. Inoltre, poiché la permanenza viene prima della variazione, la soluzione negativa è quella maggiore in valore assoluto;
$m = -1$	a è positivo, b è nullo, c è negativo; si hanno due soluzioni opposte;
$-1 < m < -\frac{1}{4}$	a è positivo, b è negativo, c è negativo; abbiamo una variazione e una permanenza, dunque una soluzione positiva e una negativa. Inoltre, poiché la variazione viene prima della permanenza, la soluzione positiva è quella maggiore in valore assoluto;
$m = -\frac{1}{4}$	a è positivo, b è negativo, c è nullo; abbiamo una soluzione uguale a zero e l'altra positiva essendoci una variazione;
$-\frac{1}{4} < m < 0$	a è positivo, b è negativo, c è positivo; abbiamo due variazioni, quindi due soluzioni positive;
$m = 0$	poiché $\Delta = 0$ le soluzioni sono coincidenti e sono positive essendoci due variazioni;
$m = 2$	analogamente al caso precedente, abbiamo due soluzioni coincidenti e positive;
$m > 2$	abbiamo ancora due variazioni, quindi due soluzioni positive.

26 $x^2 - 4kx + k + 3 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} k < -3 : x_1 < 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \\ k = -3 : x_1 < 0 \ \wedge \ x_2 = 0 \\ -3 < k \leq -\frac{3}{4} : x_1 < 0 \ \wedge \ x_2 < 0 \\ k \geq 1; x_1 > 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \end{array}\right]$$

27 $(k+1)x^2 + x - 1 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{5}{4} \leq k < -1 : x_1 > 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \\ k = -1 : x_1 > 0 \\ k > -1 : x_1 < 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \end{array}\right]$$

28 $x^2 - 4x + m - 3 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} m < 3 : x_1 > 0 \ \wedge \ x_2 < 0 \\ m = 3 : x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \\ 3 < m \leq 7 : x_1 > 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \end{array}\right]$$

29 $(m-1)x^2 + 2x + (m+1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} \leq m < -1 : x_1 > 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \\ m = -1 : x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \\ -1 < m < 1 : x_1 < 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \\ m = 1 : x_1 < 0 \\ 1 < m \leq \sqrt{2} : x_1 < 0 \ \wedge \ x_2 < 0 \end{array}\right]$$

30 $kx^2 - 2(k+2)x + k + 4 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} k < -4 : x_1 > 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \\ k = -4 : x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \\ -4 < k \leq -2 : x_1 < 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \\ -2 < k < 0 : x_1 < 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \\ k = 0 : x_1 > 0 \\ k > 0 : x_1 > 0 \ \wedge \ x_2 > 0 \end{array}\right]$$