Concetti chiave e regole

Il concetto di probabilità

Un **esperimento aleatorio** è un fenomeno di qualsiasi natura al quale è associata una situazione di incertezza. L'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento aleatorio costituisce lo **spazio campionario** Ω. Un evento aleatorio è un qualsiasi sottoinsieme dello spazio campionario. La probabilità di un evento esprime una misura della possibilità che ha quell'evento di realizzarsi.

La **probabilità** di un evento E di uno spazio campionario Ω può essere data in diversi modi:

- secondo il **modello classico**, essa è il rapporto fra il numero f di casi favorevoli all'evento ed il numero n dei casi possibili;
- secondo il **modello statistico**, è il rapporto fra il numero f di volte in cui l'evento si è verificato ed il numero n di prove fatte, quando n è molto grande.
  La **legge dei grandi numeri** ci dice poi che tale valore di probabilità, per n molto grande, tende ad essere uguale alla probabilità teorica intesa in senso classico;
- secondo il **modello soggettivo**, è il rapporto fra il prezzo P che un individuo è disposto a pagare, ed eventualmente a perdere se l'evento non si verifica, e la somma S che riceverà in cambio al verificarsi dell'evento.

  La probabilità di un evento E è dunque un numero compreso fra 0 e 1; in particolare:
  - se $p(E) = 1$, l'evento E si dice **certo**
  - se $p(E) = 0$, l'evento E si dice **impossibile**.

I primi teoremi sul calcolo delle probabilità

Un evento è spesso il risultato di operazioni insiemistiche; per calcolare la probabilità di un tale evento si applicano i seguenti teoremi:

- teorema della **probabilità contraria**: $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- teorema della **probabilità totale**: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
  e, nel caso di eventi incompatibili, essendo $p(A \cap B) = 0$: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

La probabilità condizionata

In alcuni casi, la probabilità di un evento A dipende dal verificarsi di un altro evento B; si parla allora di **probabilità condizionata** e si scrive $p(A|B)$. La probabilità condizionata è definita dalla formula (se, rispettivamente nei due casi, B e A non sono gli eventi impossibili):

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad \text{e analogamente} \qquad p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Se da queste due relazioni ricaviamo la probabilità dell'evento intersezione otteniamo il teorema della **probabilità composta:**

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

che ci dice che

- la probabilità dell'evento intersezione di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno di essi per la probabilità condizionata dell'altro, supposto che il primo si sia verificato.

Quando $p(A|B) = p(A)$, cioè quando il sapere che si è verificato B non altera la probabilità di A, i due eventi si dicono **indipendenti**; nel caso di eventi indipendenti il teorema della probabilità composta diventa:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

La formula di disintegrazione

Se un evento B può verificarsi in seguito a più cause A_i, che si escludono a vicenda, nota la probabilità di queste si ha che:

$$p(B) = p(B \mid A_1) \cdot p(A_1) + p(B \mid A_2) \cdot p(A_2) + ... + p(B \mid A_n) \cdot p(A_n)$$

Teorema di Bayes

Dati uno spazio campionario Ω e una sua partizione in n sottoinsiemi A_i (cause), indicato con B un evento non impossibile (effetto), la probabilità che B sia stato prodotto da una causa A_i è espressa da:

$$p(A_i \mid B) = \frac{p(B \mid A_i) \cdot p(A_i)}{p(B \mid A_1) \cdot p(A_1) + p(B \mid A_2) \cdot p(A_2) + ... + p(B \mid A_n) \cdot p(A_n)}$$