I problemi dal mondo reale

Saper risolvere equazioni di secondo grado ci dà modo di continuare l'analisi di problemi legati al mondo reale così da poterne trovare le soluzioni. Vediamo qualche esempio.

I esempio

Un'impresa acquista e rivende della merce a peso. Il prezzo y d'acquisto in Euro dei beni dipende dalla quantità ordinata x, espressa in chilogrammi, secondo la legge:

$$y = 10x + \frac{1}{100}x^2$$

Il prezzo di vendita è di € 25 al chilogrammo e tutto ciò che viene acquistato viene poi rivenduto. Altri costi dovuti alla gestione delle commesse e alla spedizione (deposito, trasporti, movimentazione, costo dei dipendenti, ecc.) si possono quantificare complessivamente in € 1400. Si vuole sapere:

a. qual è la funzione che determina il profitto dell'impresa;

b. qual è la quantità che si deve acquistare e vendere per avere il massimo profitto nel caso in cui l'impresa possa acquistare e vendere qualsiasi quantità di merce;

c. qual è la quantità che si deve acquistare e vendere per avere il massimo profitto nel caso in cui l'impresa possa acquistare e vendere al massimo 600kg.

a. Il profitto dell'impresa è dato dal ricavo meno i costi.
Il ricavo è dato dall'espressione: $25x$
I costi si calcolano sommando il costo della merce con le spese di gestione e sono quindi determinati dall'espressione:

$$10x + \frac{1}{100}x^2 + 1400$$

Il profitto y è dato da:

$$y = 25x - \left(10x + \frac{1}{100}x^2 + 1400\right) \quad \text{cioè} \quad y = -\frac{1}{100}x^2 + 15x - 1400$$

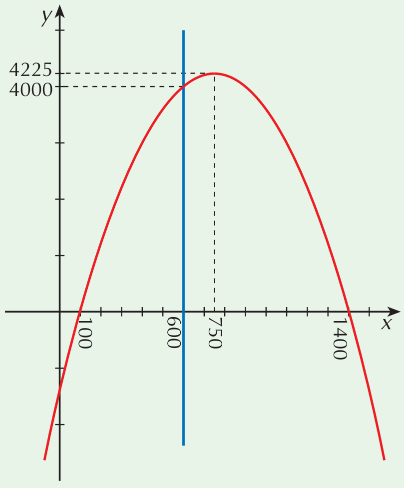
Si tratta di una parabola che ha vertice in $V(750, 4225)$ il cui grafico è in ***figura 1***; del grafico ci interessa solo la parte che appartiene al primo e quarto quadrante, che rappresenta quantità positive di merce acquistata e venduta.
Osserviamo che il profitto dell'impresa, secondo questo modello, non è sempre positivo. Troviamo gli zeri della funzione:

$$-\frac{1}{100}x^2 + 15x - 1400 = 0 \quad \rightarrow$$

$$x^2 - 1500x + 140\,000 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \begin{cases} 100 \\ 1400 \end{cases}$$

L'azienda ha un profitto positivo solo per ordini di valore compreso tra 100kg e 1400kg; per valori diversi i costi sono maggiori dei ricavi. Non vale la pena quindi accettare ordini inferiori ai 100kg o superiori ai 1400.

Figura 1



b. Il profitto massimo è rappresentato graficamente dal punto di ordinata più grande, cioè dal vertice della parabola; l'impresa ha quindi massimo guadagno se acquista e rivende 750kg di merce e il guadagno corrispondente è di € 4225.

c. Se l'azienda non può gestire più di 600kg di merce, allora il suo profitto massimo si ha per $x = 600$ che rappresenta il punto di ordinata più grande per $x \leq 600$. Il valore di tale profitto si ottiene sostituendo 600 nell'equazione della parabola ed è di € 4000.

II esempio

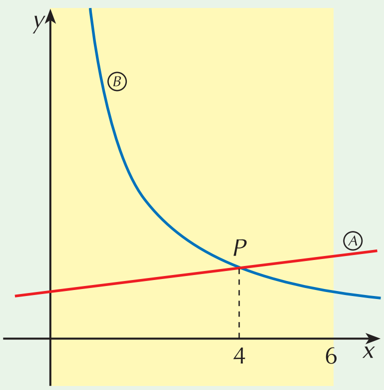
Per produrre un olio lubrificante si possono seguire due procedimenti diversi A e B il cui costo di produzione y (espresso in migliaia di Euro) dipende dalla quantità x di olio prodotto (espressa in ettolitri) secondo le due leggi:

$$A: y = \frac{1}{8}x + 1 \qquad\qquad B: y = \frac{6}{x}$$

Stabiliamo quale processo produttivo è più opportuno utilizzare al variare della quantità di olio da produrre, sapendo anche che la massima capacità produttiva giornaliera è di 6 ettolitri.

Rappresentiamo le due curve nel piano cartesiano ed evidenziamo con uno sfondo verde la zona che rappresenta la possibile produzione, cioè l'insieme degli x che sono compresi tra 0 e 6 (***figura 2***).

Figura 2



Dall'analisi del grafico appare evidente che conviene utilizzare il processo A fino al punto P, il processo B dopo P.
Per trovare l'ascissa del punto P uguagliamo le due espressioni di y e risolviamo l'equazione in x ottenuta:

$$\frac{1}{8}x + 1 = \frac{6}{x} \qquad \rightarrow \qquad x^2 + 8x - 48 = 0$$

Si tratta di un'equazione di secondo grado; applichiamo la formula risolutiva (ridotta):

$$x = -4 \pm \sqrt{16 + 48} = -4 \pm 8 = \begin{cases} -12 \\ 4 \end{cases}$$

La soluzione che ci interessa è $x = 4$, dunque l'ascissa del punto P è 4.

Possiamo allora concludere che per una produzione di olio:

- minore di 4 ettolitri è più conveniente il processo A
- compresa tra 4 e 6 ettolitri conviene di più il processo B.

ESERCIZI

1 La capacità massima di produzione giornaliera di un certo settore di un'industria chimica è di 10000 litri di prodotto che viene subito venduto a € 1,50 al litro. Il costo di produzione è determinato da un costo fisso pari a € 1350 per l'intera produzione più un costo di € 0,35 per ogni litro prodotto aumentato di 10^{-4} Euro per il quadrato del numero di litri prodotti. Vogliamo trovare:

a. la funzione che esprime il guadagno dell'azienda per ogni ciclo produttivo;
b. il numero di litri da produrre e vendere per non andare in perdita;
c. per quale produzione si ha il guadagno massimo e qual è tale guadagno.

$$\left[\mathbf{a}.\ y = -\frac{1}{10000}x^2 + \frac{23}{20}x - 1350;\ \mathbf{b}.\ 1328 \leq x \leq 10172;\ \mathbf{c}.\ 5750\ell\right]$$

2 L'efficacia di un certo farmaco A diminuisce nel tempo secondo la legge $y = \frac{800}{t}$; quella di un altro farmaco B diminuisce secondo la legge $y = -\frac{1}{1000}t + \frac{12}{5}$, dove, in entrambi i casi, il tempo t è misurato in minuti.

a. Rappresenta le due curve in uno stesso piano cartesiano tOy (t è l'asse delle ascisse, y è l'asse delle ordinate).

b. Trova per quali durate i due farmaci si equivalgono. [$t = 400$ minuti e $t = 2000$ minuti]

c. Stabilisci quale farmaco ha maggior efficacia al variare del tempo t.
[$t \leq 400 \ \vee\ t \geq 2000 : A;\ 400 \leq t \leq 2000 : B$]

3 Una fabbrica di liquori sostiene, per la propria produzione, una spesa fissa settimanale di € 2125 ed un costo per le materie prime di € 10 al litro, aumentati di 10^{-3} euro per il quadrato del numero di litri prodotti. Gli impianti permettono una produzione massima di 5000 litri settimanali e sul mercato il distillato viene venduto € 16,5 al litro. Determina:

a. il punto in cui i costi uguagliano i ricavi; [$\approx 345\,\ell$]

b. il numero dei litri che consentono alla fabbrica il massimo utile e l'ammontare di tale utile.
[$3\,250\ell$; € 8 437,50]

4 L'efficacia di un farmaco diminuisce nel tempo secondo la legge $y = \frac{12}{t}$ dove il tempo t viene misurato in ore. Il paziente dovrebbe assumere una dose del farmaco quando l'efficacia scende al di sotto del valore 1,5. Sul foglietto che accompagna il medicinale, quale deve essere il tempo consigliato tra una somministrazione e l'altra? Rappresenta graficamente la soluzione del problema.
[una dose ogni 8 ore]