Approfondimento

Particolari equazioni di grado superiore al primo

Consideriamo l'equazione $x^2 - 5x + 4 = 0$
che è di secondo grado in forma normale; se scomponiamo il polinomio al primo membro otteniamo

$$(x-1)(x-4) = 0$$

Risolvere questa equazione significa chiedersi per quali valori di x il prodotto dei due fattori $(x-1)$ e $(x-4)$ è uguale a zero.
Ma il prodotto di due numeri a e b è zero se e solo se almeno uno di essi è uguale a zero. Vale cioè la seguente regola:

Legge di annullamento del prodotto:

$$a \cdot b = 0 \quad \text{se e solo se} \quad a = 0 \quad \vee \quad b = 0$$

Allora, visto che al variare di x nell'insieme dei numeri reali i fattori $(x-1)$ e $(x-4)$ rappresentano dei numeri, il loro prodotto sarà zero se e solo se

$$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x - 4 = 0$$

Siamo quindi ricondotti a risolvere due equazioni di primo grado, dalle quali ricaviamo che deve essere

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 4$$

L'equazione data ha quindi come insieme delle soluzioni $S = \{1, 4\}$.

Usiamo il simbolo $\vee$ per indicare che, affinché il prodotto $a \cdot b$ sia nullo, è sufficiente che sia verificata una delle due equazioni:

$$a = 0 \quad \text{oppure} \quad b = 0$$

Questo metodo di risoluzione di un'equazione di grado superiore al primo si può applicare a tutte le equazioni di grado $n \geq 2$ ridotte in forma normale a condizione di saper scomporre il polinomio al primo membro in fattori di primo grado.

Considerata dunque un'equazione nella forma $P(x) = 0$, per trovare le sue soluzioni si procede in questo modo:

- si scompone il polinomio $P(x)$ in fattori tutti di primo grado
- si risolvono le equazioni che si ottengono annullando ciascun fattore della scomposizione.

L'insieme S delle soluzioni è quello che ha per elementi le radici di ciascuna equazione.

$(x+1)\ (x-2)\ (x+3) = 0$

$x + 1 = 0$

$x - 2 = 0$

$x + 3 = 0$

$S = \{-1, 2, -3\}$

Risolviamo, ad esempio, i seguenti esercizi.

1. $3x^2 = 6x$

Riduciamo in forma normale e scomponiamo $3x^2 - 6x = 0 \quad \rightarrow \quad 3x(x-2) = 0$

per la legge di annullamento del prodotto deve essere $3x = 0 \ \vee \ x - 2 = 0$

da cui ricaviamo che $x = 0 \ \vee \ x = 2$ quindi $S = \{0, 2\}$.

2. $5x^2 - 80 = 0$

L'equazione è già in forma normale; dividiamo entrambi i membri per 5 e scomponiamo in fattori

$x^2 - 16 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-4)(x+4) = 0$

per la legge di annullamento del prodotto deve essere:

$x - 4 = 0 \ \vee \ x + 4 = 0$ cioè $x = 4 \ \vee \ x = -4$ quindi $S = \{4, -4\}$.

ATTENZIONE AGLI ERRORI

L'equazione $x(x-5) = 6$ **non è equivalente** alle due equazioni

$$x = 6 \qquad x - 5 = 6$$

Infatti il prodotto di due numeri è 6 in infiniti modi diversi; potrebbe essere

$x = 2$ e $x - 5 = 3$ oppure $x = -1$ e $x - 5 = -6$

e così via.

Per risolvere l'equazione si procede in questo modo:

$x(x-5) - 6 = 0$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

e applicando la legge di annullamento del prodotto:

$x - 2 = 0 \ \vee \ x - 3 = 0$

$x = 2 \ \vee \ x = 3$.

ESERCIZI

Comprensione

1 La legge di annullamento del prodotto afferma che:

a. $a + b = 0$ se $a = 0 \ \vee \ b = 0$
b. $a + b = 0$ se $a = 0 \ \wedge \ b = 0$
c. $a \cdot b = 0$ se $a = 0 \ \vee \ b = 0$
d. $a \cdot b = 0$ se $a = 0 \ \wedge \ b = 0$

2 L'equazione $(x-2)(x+1) = 4$ è equivalente a:

a. $x - 2 = 4 \ \vee \ x + 1 = 4$
b. $x - 2 = 2 \ \vee \ x + 1 = 2$
c. $x - 2 = 0 \ \vee \ x + 1 = 0$
d. $x + 2 = 0 \ \vee \ x - 3 = 0$

3 L'equazione che ha come insieme delle soluzioni $S = \{3, -1, 0\}$ è:

a. $(x-3)(x-1) = 0$
b. $(x+3)(x-1) = 0$
c. $x(x+3)(x-1) = 0$
d. $x(x-3)(x+1) = 0$

Applicazione

Risolvi le seguenti equazioni particolari di grado superiore al primo.

4 **ESERCIZIO GUIDATO**

$x^2 - x = 0$

L'equazione è di secondo grado ed è già scritta in forma normale. Scomponiamo allora il polinomio $x^2 - x$ in fattori ed applichiamo la legge di annullamento del prodotto:

$$x(x-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 1$$

Dunque $S = \{0, 1\}$.

5 **ESERCIZIO GUIDATO**

$x(7 - 3x) = 2$

Riduciamo prima l'equazione in forma normale $7x - 3x^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 7x + 2 = 0$

scomponiamo in fattori $(x-2)(3x-1) = 0$

applichiamo la legge di annullamento del prodotto

$$x - 2 = 0 \ \vee \ 3x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \ \vee \ x = \frac{1}{3}$$

Dunque $S = \left\{2, \frac{1}{3}\right\}$.

6 **ESERCIZIO GUIDATO**

$3x^2 + 3x = x + 1$

$3x(x+1) - (x+1) = 0 \quad \rightarrow \quad (x+1)(..........) = 0 \quad \rightarrow \quad (..........) = 0 \ \vee \ (..........) = 0$

Dunque $S = \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$.

7 $2x + x^2 = 0$ $\qquad x^2 - 25 = 0$ $\qquad 7x - x^2 = 0$ $\qquad [S = \{0, -2\}; S = \{\pm 5\}; S = \{0, 7\}]$

8 $9x^2 + 21x = 0$ $\qquad 4x^2 - 12x + 9 = 0$ $\qquad 4x^2 - 1 = 0$ $\qquad \left[S = \left\{0, -\frac{7}{3}\right\}; S = \left\{\frac{3}{2}\right\}; S = \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}\right]$

9 **ESERCIZIO GUIDATO**

$9x^2 - 6x + 1 = 0$

$(3x - 1)^2 = 0$

Riflettiamo ora sul fatto che una potenza è zero se è zero la sua base; possiamo dunque risolvere l'equazione:

$$3x - 1 = 0 \qquad \text{da cui ricaviamo} \qquad x = \frac{1}{3}$$

Dunque $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

10 $(x+1)(25x^2 + 10x + 1) = 0$ $\qquad 3x(x^2 - 2x + 1) = 0$ $\qquad \left[S = \left\{-1, -\frac{1}{5}\right\}; S = \{0, 1\}\right]$

11 $(x-3)(x^2-1)=0$ $\quad (x^2-4)(x+1)=0$ $\quad x^2-4x=0$ $\quad [S=\{3, \pm 1\}; S=\{-1, \pm 2\}; S=\{0, 4\}]$

12 $x^2-9=0$ $\quad x^2-6x=0$ $\quad x(x+1)=0$ $\quad [S=\{3, -3\}; S=\{0, 6\}; S=\{-1, 0\}]$

13 $x^3-4x=0$ $\quad 2x^3-4x^2=0$ $\quad 20-x-x^2=0$ $\quad [S=\{0, \pm 2\}; S=\{0, 2\}; S=\{-5, 4\}]$

14 $8x^3+12x^2-2x-3=0$ $\quad 3x^3-4x^2-3x+4=0$ $\quad \left[S=\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}; S=\left\{\pm 1, \frac{4}{3}\right\}\right]$

15 $x^3-x^2-2x=0$ $\quad x^3-x-x^2+1=0$ $\quad [S=\{-1, 0, 2\}; S=\{\pm 1\}]$

16 $x^4=4x^3$ $\quad x^3+5x^2=4(x+5)$ $\quad [S=\{0, 4\}; S=\{-5, \pm 2\}]$

17 $x^3-4x^2-x+4=0$ $\quad (x^2-x)(x^2+3x-4)=0$ $\quad [S=\{-1, 1, 4\}; S=\{0, 1, -4\}]$

CORREGGI GLI ERRORI

Individua gli errori che sono stati commessi nel risolvere le seguenti equazioni.

18 $x^2-x=3$ $\quad x(x-1)=3$ $\quad x=3 \lor x-1=3$

19 $(x-5)=x(x-5)$ $\quad x=5 \lor x=x-5$

20 $(x+1)(x+2)=0$ $\quad x^2+3x+2=0$ $\quad x(x+3)=2$ $\quad x=2 \lor x+3=2$ $\quad x=2 \lor x=-1$