Funzioni di due variabili e rappresentazioni grafiche nello spazio

Obiettivi

- comprendere il significato di derivata parziale
- calcolare derivate parziali
- comprendere il concetto di differenziale totale
- saper applicare il concetto di derivata parziale alla determinazione dei massimi e dei minimi di una funzione di due variabili

1. Funzioni di due variabili e derivate

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 14

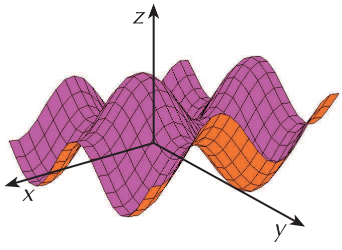
1.1 Le derivate parziali

Sappiamo che:

una funzione f di due variabili esprime una legge che ad ogni coppia di numeri reali (x, y) appartenente ad un certo insieme D associa uno ed un solo numero reale z; si scrive in questo caso che $z = f(x, y)$.

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio una funzione di due variabili è rappresentata da una superficie; non è facile costruire con carta e penna il grafico di una funzione di questo tipo, ma ci sono dei software come Wiris oppure Derive che eseguono questo compito mettendo in evidenza le caratteristiche fondamentali di queste figure. Per esempio, in ***figura 1*** è rappresentato il grafico della funzione di equazione $z = \sin x + \cos y$.

Figura 1



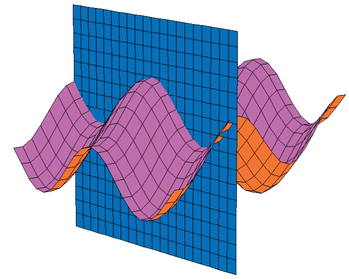
Osserviamo che sulla superficie sono disegnate alcune linee nere che, intersecandosi, mettono in evidenza l'andamento della superficie stessa; queste linee sono le intersezioni della superficie con i piani paralleli a quelli coordinati yz e xz. Per ottenerle, si fissa un valore della variabile x (piano parallelo al piano yz) oppure della variabile y (piano parallelo al piano xz) e si rappresenta la linea in quel piano. Per esempio se $x = \frac{\pi}{2}$ si disegna nello spazio la funzione

$$z = \sin \frac{\pi}{2} + \cos y \qquad \text{cioè} \qquad z = 1 + \cos y$$

Nella ***figura 2*** è rappresentato il piano $x = \frac{\pi}{2}$; la curva $z = 1 + \cos y$ è la linea intersezione della superficie con tale piano.
Nel volume base queste linee sono state chiamate **linee di livello**.

Studiare le linee di livello, determinando tutte le loro caratteristiche, quindi punti di massimo e di minimo, flessi e concavità, permette di dare una forma alla superficie $f(x, y)$.
Le linee di livello sono funzioni di una sola variabile e studiando le loro derivate possiamo determinare tutte le caratteristiche più importanti di ciascuna di esse: massimi, minimi, flessi, concavità.

Figura 2



Riprendendo la funzione f dell'esempio:

- se consideriamo x come valore costante e y come valore variabile, possiamo valutare z' derivando rispetto a y ed in questo caso è:
  z' rispetto a y: $\quad -\sin y$
- se consideriamo y come valore costante e x come valore variabile, possiamo valutare z' derivando rispetto a x ed in questo caso è:
  z' rispetto a x: $\quad \cos x$

Abbiamo in questo modo introdotto in modo intuitivo il concetto di *derivata parziale*. Diamo adesso una definizione più precisa e rigorosa di quanto detto.

Consideriamo dunque una funzione $f(x, y)$ definita in un insieme I e sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto di I. Mantenendo fisso y_0, che significa intersecare il grafico di f con il piano $y = y_0$, la funzione data dipende dalla sola variabile x e di essa possiamo calcolare il rapporto incrementale relativo al punto x_0 e ad un incremento h:

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Ad esempio, data la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x + 1$ che ha per dominio R^2 e fissato il punto $P_0(1, 2)$ di tale insieme, mantenendo fissa l'ordinata 2, possiamo calcolare il rapporto incrementale relativo al punto 1 in questo modo

$$\frac{f(1+h, 2) - f(1, 2)}{h} = \frac{\left[(1+h)^2 + 4 - 3(1+h) + 1\right] - 3}{h} = \frac{h^2 - h}{h} = h - 1$$

- *$f(1+h, 2)$ è la funzione che si ottiene sostituendo $(1+h)$ al posto di x e 2 al posto di y:* $(1+h)^2+4-3(1+h)+1$
- $f(1, 2) = 1 + 4 - 3 + 1 = 3$

Sappiamo che, se esiste finito il limite per h che tende a zero di tale rapporto (cosa che accade nell'esempio visto), la funzione $f(x, y_0)$ è derivabile in P_0. Possiamo allora dare la seguente definizione.

Si dice **derivata parziale rispetto a x** della funzione $f(x, y)$ nel punto $P_0(x_0, y_0)$ il limite, se esiste finito per h che tende a zero, del rapporto incrementale di $f(x, y)$ relativo al punto x_0 e all'incremento h; in simboli si pone

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f'_x(x_0, y_0)$$

Nell'esempio visto la derivata parziale rispetto a x della funzione data nel punto P_0 è $\lim_{h \to 0}(h - 1) = -1$.

Come nel caso delle funzioni di una sola variabile, accade poi che, se il limite del rapporto incrementale esiste finito per tutti i punti dell'insieme I, allora la funzione f è derivabile parzialmente rispetto a x in tutto I.

In modo del tutto analogo possiamo definire la derivata parziale della funzione f rispetto a y; basta pensare di mantenere fisso x_0 e far subire un incremento k a y_0. Diamo allora la seguente definizione.

Si dice **derivata parziale rispetto a y** della funzione $f(x, y)$ nel punto $P_0(x_0, y_0)$ il limite, se esiste finito per k che tende a zero, del rapporto incrementale di f relativo al punto y_0 e all'incremento k; in simboli

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = f'_y(x_0, y_0)$$

Anche in questo caso, se il limite del rapporto incrementale esiste finito per tutti i punti dell'insieme I, allora la funzione f è derivabile parzialmente rispetto a y in tutto I.

Le derivate parziali di una funzione f in un punto (x, y) si indicano generalmente con uno dei seguenti simboli

- per le derivate parziali rispetto a x $\quad f'_x \quad z'_x \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}$
- per le derivate parziali rispetto a y $\quad f'_y \quad z'_y \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Attenzione! Sappiamo che se una funzione di una variabile è derivabile in un punto x_0, allora è anche continua in tale punto. Questo non vale più per le funzioni di due variabili: esistono funzioni derivabili parzialmente in un punto P che non sono continue in tale punto. **La derivabilità parziale non è più quindi una condizione sufficiente per la continuità.**

Per il calcolo di una derivata parziale ci affidiamo poi alle regole imparate per il calcolo delle derivate delle funzioni in una sola variabile: basta infatti tener presente che nella derivazione rispetto a x, y va considerata come una costante, mentre per la derivazione rispetto a y è x che deve essere considerata costante. Vediamo alcuni esempi.

ESEMPI

Calcoliamo le derivate parziali rispetto ad entrambe le variabili delle seguenti funzioni.

1. $z = x^3 - 4x + 3y^2 - 5$

Si ha subito che:

- $z'_x = 3x^2 - 4$ (la derivata di $3y^2 - 5$ è nulla perché è la derivata di una costante)
- $z'_y = 6y$ (la derivata di $x^3 - 4x - 5$ è nulla perché è la derivata di una costante)

2. $z = \dfrac{2x + y^2}{x^2 - y}$

Si tratta di una funzione razionale fratta, quindi:

- $z'_x = \dfrac{2(x^2 - y) - 2x(2x + y^2)}{(x^2 - y)^2} = \dfrac{-2(x^2 + y + xy^2)}{(x^2 - y)^2}$
- $z'_y = \dfrac{2y(x^2 - y) + (2x + y^2)}{(x^2 - y)^2} = \dfrac{2x^2y + 2x - y^2}{(x^2 - y)^2}$

3. $z = \sqrt{x + 2y^2 - 4y}$

Si tratta di una funzione irrazionale, quindi:

- $z'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2y^2-4y}}$
- $z'_y = \dfrac{4y-4}{2\sqrt{x+2y^2-4y}} = \dfrac{2y-2}{\sqrt{x+2y^2-4y}}$

4. $z = xye^{2x^3-3y}$

- $z'_x = ye^{2x^3-3y} + xye^{2x^3-3y} \cdot 6x^2 = ye^{2x^3-3y} + 6x^3ye^{2x^3-3y} = ye^{2x^3-3y}(1+6x^3)$
- $z'_y = xe^{2x^3-3y} + xye^{2x^3-3y} \cdot (-3) = xe^{2x^3-3y} - 3xye^{2x^3-3y} = xe^{2x^3-3y}(1-3y)$

5. $z = \ln\left(\sqrt{x} + 2y\right)$

- $z'_x = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+2y} = \dfrac{1}{2x+4y\sqrt{x}}$
- $z'_y = \dfrac{2}{\sqrt{x}+2y}$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Data la funzione $f(x, y) = y^4 - 3xy + x^2$:

a. f'_x è uguale a: ① $2x - 3y$ ② $2x$ ③ $4y^3 - 3y + 2x$

b. f'_y è uguale a: ① $4y^3$ ② $4y^3 - 3y$ ③ $4y^3 - 3x$

2. L'espressione $\dfrac{x}{y}$ rappresenta la derivata parziale rispetto a y della funzione:

a. $\dfrac{x}{y^2}$ **b.** $y \ln x$ **c.** $x \ln y$ **d.** $\ln xy$

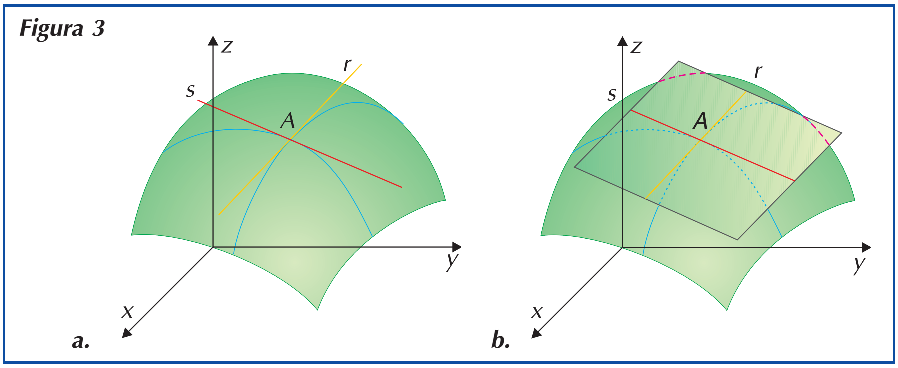
1.2 Il significato geometrico e il piano tangente

La derivata di una funzione di una sola variabile calcolata in un punto P rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in quel punto. Possiamo dare un'interpretazione analoga anche alle derivate parziali di una funzione di due variabili.

Data la funzione $z = f(x, y)$ e preso un suo punto $A(x_0, y_0, z_0)$, abbiamo visto che, per calcolare la derivata parziale rispetto a x della funzione, dobbiamo tenere fisso y_0. Dal punto di vista geometrico questo significa sezionare la superficie con il piano $y = y_0$; allora, per come è stata definita, la derivata parziale rispetto a x rappresenta il coefficiente angolare della retta r tangente alla curva sezione nel punto A (in giallo nella ***figura 3a*** di pagina seguente).

Analogamente la derivata parziale rispetto a y nel punto A rappresenta il coefficiente angolare della retta s tangente alla sezione della superficie con il piano $x = x_0$ in tale punto (in rosso nella stessa figura).

Se ora teniamo presente che due rette che si intersecano definiscono sempre un piano, le due rette tangenti alle curve sezioni definiscono un piano che è il **piano tangente** alla superficie nel punto A considerato (***figura 3b***).

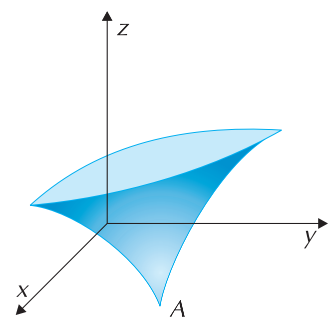


Si può dimostrare che, se le derivate parziali sono continue nel punto A, il piano tangente ha equazione

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}$$

Facciamo ora alcune considerazioni su tale piano.

- Innanzi tutto, il piano tangente, oltre alle due rette menzionate, contiene anche tutte le rette tangenti in A alle curve che si ottengono sezionando la superficie f con un piano per A; tali rette sono proprio le intersezioni dei piani sezione con il piano tangente.
- Può darsi che la superficie f non abbia piano tangente in A; ciò capita quando anche le curve sezioni non hanno la retta tangente. Ad esempio il vertice di un cono non ha piano tangente; una qualunque superficie che presenta dei "punti angolosi" non ha piano tangente in quei punti (in ***figura 4*** in A non vi è piano tangente).
- Come per le funzioni di una sola variabile la retta tangente approssima la funzione in un intorno del punto di tangenza, così il piano tangente approssima la superficie in un intorno del punto A.



ESEMPI

1. Determiniamo il piano tangente alla superficie di equazione $z = x^2 + 4y^2 - 3x$ nel suo punto di ascissa 1 e ordinata -1.

Calcoliamo innanzi tutto la quota del punto di tangenza $f(1, -1) = 2$.

Calcoliamo ora le derivate parziali $f'_x = 2x - 3$ ed è $f'_x(1, -1) = -1$

$f'_y = 8y$ ed è $f'_y(1, -1) = -8$

L'equazione del piano tangente è allora $z = 2 - 1(x - 1) - 8(y + 1)$ cioè $z = -x - 8y - 5$

2. Data la superficie di equazione $z = x^2 - y^2 + xy$, stabiliamo in quale punto il piano tangente ha equazione $z = 2x + y - 1$.

Sia $P(a, b, c)$ il punto di tangenza dove $c = f(a, b) = a^2 - b^2 + ab$.

Calcoliamo le derivate parziali $f'_x = 2x + y$ ed è $f'_x(a, b) = 2a + b$

$f'_y = -2y + x$ ed è $f'_y(a, b) = a - 2b$

Il piano tangente in P ha dunque equazione $z = f(a, b) + (2a + b)(x - a) + (a - 2b)(y - b)$

che, svolgendo i calcoli, assume la forma $z = x(2a + b) + y(a - 2b) - a^2 + b^2 - ab$

Affinché il piano trovato coincida con quello dato deve quindi essere $\begin{cases} 2a + b = 2 \\ a - 2b = 1 \\ -a^2 + b^2 - ab = -1 \end{cases}$

Risolvendo il sistema formato dalle prime equazioni troviamo che $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

Poiché la soluzione verifica anche la terza equazione, il piano dato è tangente alla superficie nel punto $P(1, 0, 1)$.

1.3 Le derivate successive

Se le derivate prime $f'_x(x, y)$ e $f'_y(x, y)$ sono funzioni a loro volta derivabili, si possono calcolare le loro derivate parziali, che rappresentano le derivate seconde della funzione $f(x, y)$.
La funzione $f'_x(x, y)$ può essere derivata parzialmente rispetto a x e parzialmente rispetto a y e così anche la funzione $f'_y(x, y)$; le derivate così ottenute si dicono derivate seconde parziali della funzione f; tali derivate sono quattro e si indicano con i seguenti simboli

f''_{xx} z''_{xx} ottenuta derivando f'_x rispetto a x

f''_{xy} z''_{xy} ottenuta derivando f'_x rispetto a y

f''_{yy} z''_{yy} ottenuta derivando f'_y rispetto a y

f''_{yx} z''_{yx} ottenuta derivando f'_y rispetto a x

Le derivate parziali seconde si indicano anche con i seguenti simboli:

$f''_{xx} \rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$f''_{xy} \rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$f''_{yy} \rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$f''_{yx} \rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Le derivate seconde della f calcolate prima rispetto ad una variabile e poi all'altra, cioè la f''_{yx} e la f''_{xy}, si dicono **derivate miste**.

Ad esempio, data la funzione $z = 2x^2 - y^3 + 3x^2y - 2y$ le sue derivate parziali seconde sono

- $f'_x = 4x + 6xy$
  ed è • $f''_{xx} = 4 + 6y$ • $f''_{xy} = 6x$
- $f'_y = -3y^2 + 3x^2 - 2$
  ed è • $f''_{yy} = -6y$ • $f''_{yx} = 6x$

Osserva che, in questo esempio, abbiamo ottenuto che le due derivate miste sono uguali.
Questo si verifica sempre se le due derivate sono continue, come ci è confermato dal seguente teorema che ci limitiamo ad enunciare.

Teorema (di Schwarz). Se la funzione $f(x,y)$ ha derivate seconde miste che sono continue in un insieme I, allora $f''_{yx} = f''_{xy}$ in ogni punto di I.

ESEMPI

Calcoliamo le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni.

1. $z = xy + x^3$ di dominio R^2

Derivate prime: • $z'_x = y + 3x^2$ • $z'_y = x$

Derivate seconde: • $z''_{xx} = 6x$ • $z''_{xy} = 1$ • $z''_{yy} = 0$ • $z''_{yx} = 1$

Le derivate parziali miste sono uguali.

2. $z = \ln^2 x + e^{xy}$ avente per dominio il semipiano delle ascisse positive

Derivate prime: • $z'_x = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} + ye^{xy} = \dfrac{2\ln x}{x} + ye^{xy}$ • $z'_y = xe^{xy}$

Derivate seconde: • $z''_{xx} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{1}{x} \cdot x - 2\ln x}{x^2} + y^2e^{xy} = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x^2} + y^2e^{xy}$ • $z''_{yy} = x^2e^{xy}$

• $z''_{xy} = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1 + xy)$ • $z''_{yx} = e^{xy} + xye^{xy} = e^{xy}(1 + xy)$

3. $z = \sqrt{x^2 + 3y}$ avente per dominio l'insieme delle coppie (x,y) per cui $x^2 + 3y \geq 0$

Derivate prime: • $z'_x = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3y}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3y}}$ • $z'_y = \dfrac{3}{2\sqrt{x^2 + 3y}}$

Derivate seconde: • $z''_{xx} = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3y} - \dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2 + 3y}}}{x^2 + 3y} = \dfrac{3y}{(x^2 + 3y)\sqrt{x^2 + 3y}}$

• $z''_{yy} = -\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (x^2 + 3y)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3 = -\dfrac{9}{4(x^2 + 3y)\sqrt{x^2 + 3y}}$

• $z''_{xy} = -\dfrac{1}{2}x(x^2 + 3y)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3 = -\dfrac{3x}{2(x^2 + 3y)\sqrt{(x^2 + 3y)}}$

• $z''_{yx} = -\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (x^2 + 3y)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\dfrac{3x}{2(x^2 + 3y)\sqrt{(x^2 + 3y)}}$

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. L'equazione del piano tangente alla funzione $z = x^2 - y^2$ nel suo punto di ascissa $x = 2$ e ordinata $y = 1$ è:

a. $z = 4x + 2y + 3$ **b.** $z = -4x + 2y - 3$ **c.** $z = 4x - 2y + 3$ **d.** $z = 4x - 2y - 3$

2. Data la funzione $z = 3x^2 - \log\sqrt{xy}$, stabilisci quali delle seguenti relazioni sono vere.

a. $z'_x = 6x - \dfrac{1}{2x}$ **b.** $z''_{xy} = 6 + \dfrac{1}{2x^2}$ **c.** $z'_y = \dfrac{1}{2y}$ **d.** $z''_{yx} = 0$

2. IL DIFFERENZIALE TOTALE

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 20

Sia $f(x, y)$ una funzione definita in un insieme D del piano xy e sia $P(x_0, y_0)$ un punto di D; supponiamo poi che in P esistano le derivate parziali di f.

Si dice **differenziale parziale della funzione *f* rispetto a *x*** relativo al punto P e all'incremento Δx l'espressione $f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x$.

Analogamente

si dice **differenziale parziale della funzione *f* rispetto a *y*** relativo al punto P e all'incremento Δy l'espressione $f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$.

Si dice **differenziale totale della funzione *f*** relativo al punto P e agli incrementi Δx e Δy, e si indica con df, la somma dei differenziali parziali della funzione stessa:

$$df = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

Osserviamo poi che, se consideriamo le funzioni $h(x, y) = x$ e $g(x, y) = y$, i loro differenziali totali sono rispettivamente

$$dh = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x \qquad \text{cioè} \qquad dx = \Delta x$$

$$dg = 0 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y = \Delta y \qquad \text{cioè} \qquad dy = \Delta y$$

Δx e Δy sono quindi uguali ai differenziali totali delle variabili indipendenti.

Il differenziale totale in P di una qualunque funzione f è allora esprimibile con la relazione

$$df = f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy$$

Ad esempio, data la funzione $z = x\sqrt{y+3}$, tenendo presente che è

$$f'_x = \sqrt{y+3} \qquad \text{e} \qquad f'_y = \frac{x}{2\sqrt{y+3}}$$

il suo differenziale totale nel punto $(2, 1)$ è

$$df = f'_x(2,1) \cdot dx + f'_y(2, 1) \cdot dy = 2dx + \frac{1}{2}dy$$

Il differenziale di una funzione riveste grande importanza nel caso delle funzioni di due variabili perché si dimostra che **se una funzione $f(x, y)$ è differenziabile in punto P, allora è anche continua in P.**

Se, nel caso di una funzione di una sola variabile, calcolare il differenziale in un punto significa approssimare la funzione con la sua retta tangente, nel caso di una funzione di due variabili calcolare il differenziale totale significa approssimare la funzione con il suo piano tangente.
Ad esempio, se vogliamo calcolare un valore approssimato della funzione f dell'esempio precedente nel punto $A(2{,}02; 1{,}04)$, possiamo ricorrere al differenziale calcolato in $(2,1)$ e considerare $dx = 0{,}02$ e $dy = 0{,}04$; si ha così che

$$df = 2 \cdot 0{,}02 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}04 = 0{,}06$$

quindi un valore approssimato di f nel punto A è

$$f(2{,}02;\ 1{,}04) = f(2,\ 1) + 0{,}06 = 4{,}06$$

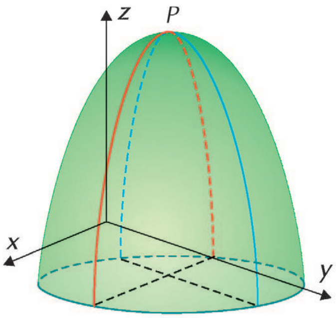
Se calcoliamo, con l'aiuto di una calcolatrice, il valore della funzione in tale punto troviamo che $f(2{,}02;\ 1{,}04) = 4{,}0601497...$ quindi il valore trovato con il differenziale è esatto fino alla seconda cifra decimale.

3. LA RICERCA DEI MASSIMI E DEI MINIMI

Gli esercizi di questo paragrafo sono a pag. 22

Abbiamo già dato le definizioni di massimo e minimo di una funzione di due variabili nel testo base e in quella sede abbiamo visto che questi punti si possono determinare usando le linee di livello.
Un altro modo di procedere sfrutta il significato di derivata parziale.
Osserviamo infatti che, se la funzione f assume il suo valore massimo in un punto $P(x_0,\ y_0)$, la sua linea sezione con il piano per P parallelo al piano coordinato xz (la linea rossa in ***figura 5***), cioè la funzione $f(x,\ y_0)$, deve anch'essa avere un massimo in P e contemporaneamente anche la linea sezione con il piano parallelo al piano coordinato yz (linea blu), cioè la funzione $f(x_0,\ y)$, deve avere un massimo in P (***figura 5***). Questo significa che le derivate prime di queste due funzioni devono annullarsi contemporaneamente nel punto $(x_0,\ y_0)$.
Allora una condizione necessaria per l'esistenza di un punto di massimo o di minimo in P è data dal seguente teorema.

Figura 5



Teorema. Se una funzione $f(x,\ y)$ di dominio D possiede un massimo o un minimo nel punto $P(x_0,\ y_0)$ interno a D, allora

$$f'_x(x_0,\ y_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'_y(x_0,\ y_0) = 0$$

Dal punto di vista geometrico il teorema afferma che, in un punto di massimo o minimo, le rette tangenti alle curve $f(x,\ y_0)$ e $f(x_0,\ y)$ sono parallele al piano xy; anche il piano tangente quindi, contenendo queste due rette, è parallelo allo stesso piano. Allora, poiché l'equazione del piano tangente è

$$z = f(x_0,\ y_0) + f'_x(x_0,\ y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,\ y_0)(y - y_0)$$

e l'equazione di un piano parallelo allo stesso piano xy assume la forma $z = k$ (con k costante reale), le due equazioni coincidono se i coefficienti delle due variabili x e y sono entrambi nulli, cioè se $f'_x(x_0,\ y_0) = f'_y(x_0,\ y_0) = 0$.

Quindi:

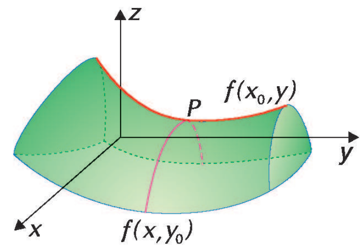
i punti di massimo e di minimo relativi di una funzione f vanno ricercati fra quelli che annullano contemporaneamente le derivate prime parziali di f, cioè fra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,\ y) = 0 \\ f'_y(x,\ y) = 0 \end{cases}$$

Tali punti si dicono **punti stazionari** o **punti critici** della funzione f.

Il teorema enunciato è una condizione necessaria per l'esistenza di punti di massimo o di minimo relativi, ma non è una condizione sufficiente; può capitare ad esempio che si annullino entrambe le derivate parziali prime ma che il punto P sia un punto di massimo per $f(x, y_0)$ e un punto di minimo per $f(x_0, y)$ (***figura 6***) oppure un punto di flesso a tangente orizzontale per una o per entrambe le funzioni.

Figura 6



Ricerchiamo allora se esistono delle condizioni sufficienti per stabilire se e quando un punto stazionario è un punto estremante per f.
Se ricordi, per una funzione $g(x)$ di una sola variabile si sa che se per un punto c del dominio della funzione si verifica che

- $g'(c) = 0$ e $g''(c) > 0$ allora c è un punto di minimo
- $g'(c) = 0$ e $g''(c) < 0$ allora c è un punto di massimo.

Una condizione simile vale anche per le funzioni di due variabili; diamo prima una definizione.

Data una funzione $f(x, y)$ di dominio D, che ammette derivate parziali seconde continue in D, si dice **hessiano di *f***, e si indica con il simbolo $H(x, y)$, il determinante

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

Ad esempio, data la funzione $f(x, y) = x^3 - y^2 + 4xy$, si ha che $f'_x = 3x^2 + 4y$ e $f'_y = -2y + 4x$ e quindi

$$f''_{xx} = 6x \qquad f''_{xy} = f''_{yx} = 4 \qquad f''_{yy} = -2$$

Allora $H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -12x - 16.$

Si dimostra che vale il seguente teorema.

Teorema. Sia $P(x_0, y_0)$ un punto stazionario per una funzione f, cioè tale che $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, e sia $H(x_0, y_0)$ l'hessiano di f calcolato in P. Si ha che:

- se $H(x_0, y_0) > 0$ e contemporaneamente $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ allora P è un punto di minimo relativo;
- se $H(x_0, y_0) > 0$ e contemporaneamente $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ allora P è un punto di massimo relativo.

Questo teorema ci dà quindi delle condizioni sufficienti affinché un punto stazionario sia un massimo o un minimo relativo. Se si ha invece che

- $H(x_0, y_0) < 0$, allora P non è né un massimo né un minimo e si dice che è un **punto di sella**;
- $H(x_0, y_0) = 0$, non si può dire nulla su P e si deve indagare in modo diverso, ad esempio servendosi delle curve di livello in un intorno di P.

Un punto di sella è quindi un punto in cui si annullano le derivate parziali prime rispetto a x e rispetto a y e quindi in esso il piano tangente è parallelo al piano xy, tuttavia è un punto in cui si presenta la situazione che avevamo raffigurato in ***figura 6***.

ESEMPI

Determiniamo gli eventuali punti di massimo e di minimo delle seguenti funzioni applicando, dove è possibile, il metodo delle derivate parziali.

1. $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 3x + y \qquad D = R^2$

Calcoliamo le derivate parziali prime: $\quad f'_x = x - 3 \qquad f'_y = 2y + 1$

Determiniamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Il solo punto stazionario è $A\left(3, -\frac{1}{2}\right)$.

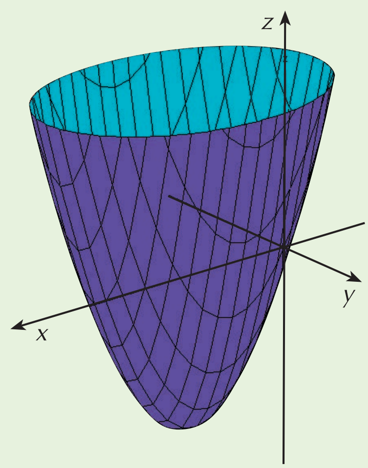
Calcoliamo le derivate parziali seconde e costruiamo l'hessiano:

$$f''_{xx} = 1 \qquad f''_{xy} = f''_{yx} = 0 \qquad f''_{yy} = 2 \qquad H = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

L'hessiano è sempre positivo e lo è quindi anche in A; inoltre $f''_{xx}\left(3, -\frac{1}{2}\right) > 0$ (è uguale a 1 in tutti i punti). Possiamo concludere che A è un punto di minimo relativo ed è $f(0, 0) = 0$.

In ***figura 7*** il grafico della funzione.

Figura 7



2. $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - xy + x \qquad D = R^2$

Calcoliamo le derivate parziali prime: $\quad f'_x = 2x - y + 1 \qquad f'_y = -4y - x$

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -4y - x = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -\frac{4}{9} \\ y = \frac{1}{9} \end{cases}$

Il solo punto stazionario è il punto $A\left(-\frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$; calcoliamo l'hessiano:

$$f''_{xx} = 2 \qquad f''_{xy} = f''_{yx} = -1 \qquad f''_{yy} = -4$$

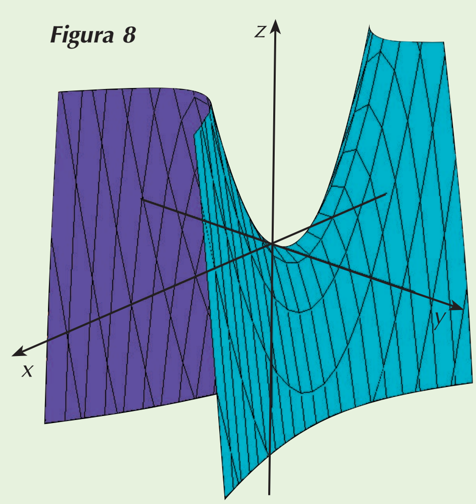
L'hessiano è quindi $\quad H = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -9$

Avendo trovato un valore negativo, possiamo concludere che A è un punto di sella ed è

$$f\left(-\frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right) = -\frac{2}{9}.$$

In ***figura 8*** il grafico.

Figura 8



3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 4x^2 - 2y^2 + 3 \qquad D = R^2$

Calcoliamo le derivate parziali prime: $\quad f'_x = 3x^2 - 8x \qquad f'_y = 3y^2 - 4y$

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} 3x^2 - 8x = 0 \\ 3y^2 - 4y = 0 \end{cases}$

Dalla prima equazione ricaviamo che: $\quad x = 0 \quad \vee \quad x = \dfrac{8}{3}$

Dalla seconda equazione ricaviamo che: $\quad y = 0 \quad \vee \quad y = \dfrac{4}{3}$

Abbiamo quindi quattro soluzioni che determinano i punti: $A(0, 0) \quad B\left(0, \dfrac{4}{3}\right) \quad C\left(\dfrac{8}{3}, 0\right) \quad D\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

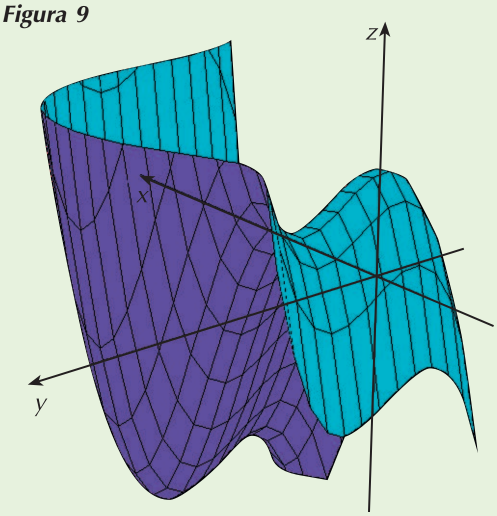
Calcoliamo le derivate parziali seconde e costruiamo l'hessiano:

$f''_{xx} = 6x - 8 \qquad f''_{xy} = f''_{yx} = 0 \qquad f''_{yy} = 6y - 4 \qquad H = \begin{vmatrix} 6x - 8 & 0 \\ 0 & 6y - 4 \end{vmatrix} = (6x - 8)(6y - 4)$

Valutiamo l'hessiano nei quattro punti:

- in A: $\quad H(0, 0) = 32 \quad$ ed è $\quad f''_{xx} = -8$
  A è un punto di massimo relativo ed è $f(0, 0) = 3$
- in B: $\quad H\left(0, \dfrac{4}{3}\right) = -32$
  B è un punto di sella ed è $f\left(0, \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{49}{27}$
- in C: $\quad H\left(\dfrac{8}{3}, 0\right) = -32$
  C è un punto di sella ed è $f\left(\dfrac{8}{3}, 0\right) = -\dfrac{175}{27}$
- in D: $\quad H\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}\right) = 32 \quad$ ed è $\quad f''_{xx} = 8$
  D è un punto di minimo relativo ed è $f\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{23}{3}$

Figura 9



In ***figura 9*** è visibile una parte del grafico.

VERIFICA DI COMPRENSIONE

1. Le derivate parziali prime f'_x e f'_y di una funzione $f(x, y)$ si annullano in un solo punto P; si può dire che:

a. P è un punto di massimo, di minimo oppure una sella V F

b. P è un punto stazionario V F

c. la funzione non possiede altri punti stazionari oltre a P V F

d. tutte le precedenti affermazioni sono false. V F

2. La funzione $f(x, y) = x^3 + 6xy - 2$ nel punto di coordinate $(0, 0)$ ha:

a. un punto di massimo relativo **b.** un punto di minimo relativo

c. un punto di sella **d.** né un massimo, né un minimo, né una sella.

I concetti e le regole

Le derivate parziali

Data una funzione $f(x, y)$, si definisce:

- **derivata parziale di f rispetto a x** in un punto $P(x_0, y_0)$ il limite, se esiste finito, per $h \to 0$ del rapporto incrementale relativo alla sola variabile x :
$$f'_x = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
- **derivata parziale di f rispetto a y** in un punto $P(x_0, y_0)$ il limite, se esiste finito, per $k \to 0$ del rapporto incrementale relativo alla sola variabile y :
$$f'_y = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Per calcolare una derivata parziale si applicano le regole di derivazione delle funzioni di una sola variabile considerando l'altra come una costante.
Se le derivate parziali di una funzione f sono continue in un punto P, il **piano tangente** alla superficie ha equazione
$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Se le derivate parziali prime sono funzioni a loro volta derivabili, si possono calcolare le derivate successive rispetto a una qualsiasi delle variabili:

f''_{xx} è la derivata parziale di f'_x rispetto a x

f''_{xy} è la derivata parziale di f'_x rispetto a y

f''_{yy} è la derivata parziale di f'_y rispetto a y

f''_{yx} è la derivata parziale di f'_y rispetto a x

Le ultime due derivate si chiamano **derivate miste** e, se sono continue in un insieme I, si verifica che $f''_{xy} = f''_{yx}$ in tutti i punti di I (teorema di Schwarz).

Il differenziale

Se una funzione $f(x, y)$ è derivabile in un punto $P(x_0,y_0)$, si può definire:

- il differenziale parziale di f rispetto a x : $df_x = f'_x(x_0 ,y_0) \cdot dx$
- il differenziale parziale di f rispetto a y : $df_y = f'_y(x_0, y_0) \cdot dy$
- il differenziale totale di f: $df = f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy$

Se una funzione è differenziabile in un punto P, allora è continua in P; la derivabilità non è invece garanzia di continuità.

La determinazione dei punti stazionari

I punti stazionari sono i punti che annullano contemporaneamente le due derivate parziali prime f'_x e f'_y e si trovano quindi risolvendo il sistema:
$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

Chiamiamo poi **hessiano** di $f(x, y)$ il determinante $H(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$

Se $P(x_0, y_0)$ è un punto stazionario, allora esso rappresenta:

- un punto di minimo relativo se: $H(x_0, y_0) > 0 \quad \wedge \quad f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$
- un punto di massimo relativo se: $H(x_0, y_0) > 0 \quad \wedge \quad f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$
- un punto di sella se: $H(x_0, y_0) < 0$.

Non si può trarre alcuna conclusione sul punto P se $H(x_0, y_0) = 0$.

Funzioni di due variabili e rappresentazioni grafiche nello spazio

FUNZIONI DI DUE VARIABILI E DERIVATE

la teoria è a pag. 1

RICORDA

- Il piano tangente alla funzione $f(x, y)$ in un punto $P(x_0, y_0)$ del suo dominio ha equazione

  $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

Comprensione

1 La derivata parziale della funzione $f(x, y)$ rispetto a x nel punto $P(x_0, y_0)$ si definisce come:

a. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ **b.** $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$

c. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{h}$ **d.** $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(x_0 + k, y_0) - f(x_0, y_0)}{k}$

2 Individua tra le seguenti, le funzioni che rappresentano le derivate parziali prime di $f(x, y) = x^2y - 3xy^2$ rispetto a x e rispetto a y:

a. $2xy - 3y^2$ **b.** $x^2 - 6x$ **c.** $2x - 3$ **d.** $x^2 - 6xy$

3 Il piano tangente alla funzione $f(x, y) = 2x^3 - y$ nel punto di ascissa 2 e ordinata 3 ha equazione:

a. $z = 3x - y + 1$ **b.** $z = 24x - y - 32$ **c.** $z = -3x + y + 1$ **d.** $z = 3x - y$

4 Sapendo che $f''_{xy} = 3x - y$ si può dire che f''_{yx} è uguale a:

a. $\dfrac{1}{3x - y}$ **b.** $y - 3x$ **c.** $3x - y$

d. non è possibile rispondere perché non si conosce la funzione f.

Applicazione

Il calcolo delle derivate prime

Calcola le derivate parziali prime delle seguenti funzioni, applicando le regole di derivazione.

5 $z = x^3 - 3x^2 + xy^2$ $[3x^2 - 6x + y^2, 2xy]$

6 $z = 2x^3 - 3xy^2$ $[6x^2 - 3y^2, -6xy]$

7 $z = 2x^2y - 4x^2y^2 + y^3$ $[4xy(1 - 2y), 2x^2 - 8x^2y + 3y^2]$

8 $z=(2x-4y+1)^3$ $\qquad [6(2x-4y+1)^2,\ -12(2x-4y+1)^2]$

9 $z=xy(x+2y)$ $\qquad [2xy+2y^2,\ x^2+4xy]$

10 $z=3x^2y^3$ $\qquad [6xy^3,\ 9x^2y^2]$

11 $z=1-xy+4x^2$ $\qquad [8x-y,\ -x]$

12 $z=x^2y-xy^2$ $\qquad [2xy-y^2,\ x^2-2xy]$

13 $z=x^3y^4+2x^2y^5-xy^6+y^7$ $\qquad [3x^2y^4+4xy^5-y^6,\ 4x^3y^3+10x^2y^4-6xy^5+7y^6]$

14 $z=\dfrac{x+y}{x-y}$ $\qquad \left[-\dfrac{2y}{(x-y)^2},\ \dfrac{2x}{(x-y)^2}\right]$

15 $z=\dfrac{x+y}{x^2-3y}$ $\qquad \left[-\dfrac{x^2+2xy+3y}{(x^2-3y)^2},\ \dfrac{x(x+3)}{(x^2-3y)^2}\right]$

16 $x=\dfrac{x-4y^2}{x}$ $\qquad \left[\dfrac{4y^2}{x^2},\ -\dfrac{8y}{x}\right]$

17 $z=\dfrac{x+2y^2}{x+y-3}$ $\qquad \left[-\dfrac{2y^2-y+3}{(x+y-3)^2},\ \dfrac{4xy-x+2y^2-12y}{(x+y-3)^2}\right]$

18 $z=\dfrac{x^2-3xy}{x^3-1}$ $\qquad \left[-\dfrac{x^4-6x^3y+2x-3y}{(x^3-1)^2},\ \dfrac{3x}{1-x^3}\right]$

19 $z=\dfrac{x^2-6xy^2}{y^2-4}$ $\qquad \left[\dfrac{2(x-3y^2)}{y^2-4},\ \dfrac{2xy(24-x)}{(y^2-4)^2}\right]$

20 $z=x\sqrt{y}$ $\qquad \left[\sqrt{y},\ \dfrac{x}{2\sqrt{y}}\right]$

21 $z=\cos(xy)$ $\qquad [-y\sin(xy),\ -x\sin(xy)]$

22 $z=x\cos y+y\cos x$ $\qquad [\cos y-y\sin x,\ \cos x-x\sin y]$

23 $z=\sin^2(xy)$ $\qquad [2y\sin(xy)\cos(xy),\ 2x\sin(xy)\cos(xy)]$

24 $z=\arcsin(2x-y)$ $\qquad \left[\dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-y)^2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x-y)^2}}\right]$

25 $z=2\sin x\cos x+y$ $\qquad [2\cos 2x,\ 1]$

26 $z=x^4-6\sqrt{x}+2y-\sqrt{y}$ $\qquad \left[4x^3-\dfrac{3}{\sqrt{x}},\ 2-\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right]$

27 $z=2x^3-\dfrac{1}{2}xy^2+\sqrt{xy}$ $\qquad \left[6x^2-\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{y}{2\sqrt{xy}},\ -xy+\dfrac{x}{2\sqrt{xy}}\right]$

28 $z=3x\sqrt{x^2-y^2}$ $\qquad \left[\dfrac{3(2x^2-y^2)}{\sqrt{x^2-y^2}},\ -\dfrac{3xy}{\sqrt{x^2-y^2}}\right]$

29 $z=x-y+\sqrt{x^2-y^2}$ $\qquad \left[1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}},\ -1-\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right]$

30 $z=x+4y-\sqrt{x+y}$ $\qquad \left[\dfrac{2\sqrt{x+y}-1}{2\sqrt{x+y}},\ \dfrac{8\sqrt{x+y}-1}{2\sqrt{x+y}}\right]$

31 $z=\sqrt[3]{xy}$ $\qquad \left[\dfrac{y}{\sqrt[3]{x^2y^2}},\ \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2y^2}}\right]$

32 $z = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{xy}$ $\left[\dfrac{1-\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}, \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}\right]$

33 $z = \dfrac{1-x-y^2}{\sqrt{y}}$ $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{y}}, \dfrac{x-3y^2-1}{2y\sqrt{y}}\right]$

34 $z = \sqrt{\dfrac{xy}{x+y}}$ $\left[\dfrac{y^2}{2(x+y)^2}\sqrt{\dfrac{x+y}{xy}}, \dfrac{x^2}{2(x+y)^2}\sqrt{\dfrac{x+y}{xy}}\right]$

35 $z = \sqrt{\dfrac{x^2-y}{y^2+x}}$ $\left[\dfrac{x^2+2xy^2+y}{2(x+y^2)(x^2-y)}\sqrt{\dfrac{x^2-y}{x+y^2}}, \dfrac{2x^2y+x-y^2}{2(x+y^2)(y-x^2)}\sqrt{\dfrac{x^2-y}{x+y^2}}\right]$

36 $z = \ln(x^2-y^2)$ $\left[\dfrac{2x}{x^2-y^2}, -\dfrac{2y}{x^2-y^2}\right]$

37 $z = \ln\left(\dfrac{x-2y}{x+y}\right)$ $\left[\dfrac{3y}{x^2-xy-2y^2}, \dfrac{-3x}{x^2-xy-2y^2}\right]$

38 $z = \ln\left(\sqrt{x} + x^2y^2\right)$ $\left[\dfrac{4y^2\sqrt{x^3}+1}{2x\left(y^2\sqrt{x^3}+1\right)}, \dfrac{2y\sqrt{x^3}}{y^2\sqrt{x^3}+1}\right]$

39 $z = ye^{xy}$ $\left[y^2e^{xy}, (1+xy)e^{xy}\right]$

40 $z = e^{\sqrt{x+y^2}}$ $\left[\dfrac{e^{\sqrt{x+y^2}}}{2\sqrt{x+y^2}}, \dfrac{y\,e^{\sqrt{x+y^2}}}{\sqrt{x+y^2}}\right]$

41 $z = \dfrac{\sin x \cos y}{\sin x + \cos y}$ $\left[\dfrac{\cos x(1-\sin^2 y)}{(\sin x+\cos y)^2}, -\dfrac{\sin^2 x \sin y}{(\sin x+\cos y)^2}\right]$

42 $z = \ln\sin(xy+1)$ $[y \operatorname{cotan}(xy+1), x \operatorname{cotan}(xy+1)]$

43 $z = \dfrac{\sqrt{2x+y}}{x^2-y}$ $\left[-\dfrac{3x^2+2xy+y}{(x^2-y^2)\sqrt{2x+y}}, \dfrac{x^2+4x+y}{2(x^2-y^2)\sqrt{2x+y}}\right]$

44 $z = \ln_y x$ $\left[\dfrac{1}{x\ln y}, -\dfrac{\ln x}{y\ln^2 y}\right]$

45 $z = \ln(x+\ln y)$ $\left[\dfrac{1}{x+\ln y}, \dfrac{1}{y(x+\ln y)}\right]$

46 $z = y^x$ $\left[y^x \ln y, xy^{x-1}\right]$

47 $z = \ln\left(xe^{x+2y}\right)$ $\left[\dfrac{1}{x}+1, 2\right]$

48 $z = \arctan\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}$ $\left[\dfrac{(x-y)\sqrt{xy}}{2x(x^2+3xy+y^2)}, \dfrac{(y-x)\sqrt{xy}}{2y(x^2+3xy+y^2)}\right]$

49 $z = \ln\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}$ $\left[\dfrac{y^2}{x(x^2+y^2)}, -\dfrac{y}{x^2+y^2}\right]$

50 $z = \sqrt{\dfrac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y}}$ $\left[\sqrt{\dfrac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}}\cdot\dfrac{\cos x \sin y}{(\sin x+\sin y)^2}; -\sqrt{\dfrac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}}\cdot\dfrac{\sin x\cos y}{(\sin x+\sin y)^2}\right]$

51 $z = \ln\dfrac{\sin x + \cos y}{\sin y}$ $\left[\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos y}; -\dfrac{\sin x\cos y+1}{\sin y(\sin x+\cos y)}\right]$

Il piano tangente

Calcola l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x, y)$ assegnata nel punto P del suo dominio a fianco indicato.

52 **ESERCIZIO GUIDA**

$z = (xy + 1)^2 \qquad P(1, 2)$

Calcoliamo le derivate parziali e $z(P)$:

$z'_x = 2y(xy + 1)$ da cui $z'_x(1, 2) = 12$

$z'_y = 2x(xy + 1)$ da cui $z'_y(1, 2) = 6$

$z(P) = 9$

Il piano ha quindi equazione: $z = 9 + 12(x - 1) + 6(y - 2)$

cioè: $z = 12x + 6y - 15$

53 $z = (2x - 4y + 1)^3$ $\quad P(0, 0)$ $\quad [z = 6x - 12y + 1]$

54 $z = ye^{xy}$ $\quad P(1, 0)$ $\quad [z = y]$

55 $z = xy(x + 2y)$ $\quad P(0, 0)$ $\quad [z = 0]$

56 $z = \ln(x^2 - y^2)$ $\quad P(e, 0)$ $\quad \left[z = \dfrac{2}{e}x\right]$

57 $z = 3x^2y^3$ $\quad P(1, 1)$ $\quad [z = 6x + 9y - 12]$

58 $z = 1 - xy$ $\quad P(1, 2)$ $\quad [z = -2x - y + 3]$

59 $z = x^2y - xy^2 - 4$ $\quad P(0, 0)$ $\quad [z = -4]$

60 $z = \dfrac{x + y}{x - y}$ $\quad P(1, -1)$ $\quad \left[z = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y\right]$

61 $z = \sqrt{\dfrac{xy}{x + y}}$ $\quad P(1, 1)$ $\quad \left[z = \dfrac{\sqrt{2}}{8}x + \dfrac{\sqrt{2}}{8}y + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$

62 $z = x\sqrt{y}$ $\quad P(0, 1)$ $\quad [z = x]$

63 $z = e^{x+y}$ $\quad P(1, 0)$ $\quad [z = ex + ey]$

64 $z = \dfrac{\ln(x + y)}{\sqrt{x + y}}$ $\quad P(0, 1)$ $\quad [z = x + y - 1]$

65 $z = \sqrt[3]{xy}$ $\quad P(2, 4)$ $\quad \left[z = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{6}y + \dfrac{2}{3}\right]$

66 $z = \dfrac{xy(1 - 2y)}{x + 3}$ $\quad P(1, 0)$ $\quad \left[z = \dfrac{1}{4}y\right]$

67 $z = x^2\, e^{x^2 - 3y}$ $\quad P(-1, 0)$ $\quad [z = -e(4x + 3y + 3)]$

68 $z = x\cos y + y\cos x$ $\quad P(0, 0)$ $\quad [z = x + y]$

69 $z = \sin^2(xy) + 1$ $\quad P(0, 0)$ $\quad [z = 1]$

70 $z = \cos(x + y^3)$ $\quad P(0, 0)$ $\quad [z = 1]$

71 $z = 2 \sin x \cos x + y$ $\quad P(0, 1)$ $\quad [z = 2x + y]$

72 Data la funzione $z = 2x - x^2 y + y$ determina le equazioni dei piani paralleli al piano xy e ad essa tangenti. $[z = 2 \text{ in } P(1, 1);\ z = -2 \text{ in } Q(-1, -1)]$

73 Data la funzione $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ determina le equazioni del piano ad essa tangente e parallelo al piano xy. $[z = \pm 2]$

74 Data la funzione $z = x^2 - y^2$, determina l'equazione del piano ad essa tangente che passa per il suo punto $P(1, 2, -3)$. $[z = 2x - 4y + 3]$

75 Data la funzione $z = 3x^2 + 5y^2 - 2x$ determina l'equazione del piano ad essa tangente che sia parallelo al piano $\alpha : 3x - y + z = 1$. $\left[z = -3x + y - \dfrac{2}{15}\right]$

76 Data la funzione $z = x(2 + \sin y) - x^2 + 2x$ determina le equazioni dei piani ad essa tangenti e paralleli al piano xy. $\left[z = \dfrac{25}{4};\ z = \dfrac{9}{4}\right]$

Il calcolo delle derivate seconde

Calcola le derivate prime e seconde delle seguenti funzioni, dopo aver determinato il dominio della funzione data.

77 **ESERCIZIO GUIDA**

$z = x + y\sqrt{x}$

Il dominio è il semipiano $x \geq 0$. Applicando le regole di derivazione si ha

$$z'_x = 1 + \frac{y}{2\sqrt{x}} \qquad z'_y = \sqrt{x}$$

$$z''_{xx} = -\frac{y}{4\sqrt{x^3}} \qquad z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad z''_{yy} = 0$$

78 $z = xy$ $\quad \left[\begin{array}{l} D = R^2 \\ z'_x = y;\quad z'_y = x \\ z''_{xx} = 0;\quad z''_{yy} = 0;\quad z''_{xy} = z''_{yx} = 1 \end{array}\right]$

79 $z = x^5 + 2y^4 - 1$ $\quad \left[\begin{array}{l} D = R^2 \\ z'_x = 5x^4;\quad z'_y = 8y^3 \\ z''_{xx} = 20x^3;\quad z''_{yy} = 24y^2;\quad z''_{xy} = z''_{yx} = 0 \end{array}\right]$

80 $z = 3x^4 - 2x^3y^2 + xy^3$ $\quad \left[\begin{array}{l} D = R^2 \\ z'_x = 12x^3 - 6x^2y^2 + y^3;\quad z'_y = 3xy^2 - 4x^3y \\ z''_{xx} = 36x^2 - 12xy^2;\quad z''_{yy} = 6xy - 4x^3;\quad z''_{xy} = z''_{yx} = 3y^2 - 12x^2y \end{array}\right]$

81 $z = \dfrac{1}{2}xy^2 - 3x^2y^2 + y^4$ $\quad \left[\begin{array}{l} D = R^2 \\ z'_x = \dfrac{y^2}{2} - 6xy^2;\quad z'_y = -y(6x^2 - x - 4y^2) \\ z''_{xx} = -6y^2;\quad z''_{yy} = -6x^2 + x + 12y^2;\quad z''_{xy} = z''_{yx} = y(1 - 12x) \end{array}\right]$

82 $z = x^3 - 2x^2 y + y^2 - 1$

$$\left[\begin{array}{l} D = R^2 \\ z'_x = 3x^2 - 4xy; \quad z'_y = -2x^2 + 2y \\ z''_{xx} = 6x - 4y; \quad z''_{yy} = 2; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = -4x \end{array}\right]$$

83 $z = x^4 + y^4 - 8(x^2 + y^2)$

$$\left[\begin{array}{l} D = R^2 \\ z'_x = 4x^3 - 16x; \quad z'_y = 4y^3 - 16y \\ z''_{xx} = 12x^2 - 16; \quad z''_{yy} = 12y^2 - 16; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 0 \end{array}\right]$$

84 $z = x^2 - \dfrac{1}{2}xy + 5y^2$

$$\left[\begin{array}{l} D = R^2 \\ z'_x = 2x - \dfrac{1}{2}y; \quad z'_y = 10y - \dfrac{1}{2}x \\ z''_{xx} = 2; \quad z''_{yy} = 10; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right]$$

85 $z = -2x^3 - x^2 - y^2 + 5$

$$\left[\begin{array}{l} D = R^2 \\ z'_x = -6x^2 - 2x; \quad z'_y = -2y \\ z''_{xx} = -12x - 2; \quad z''_{yy} = -2; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 0 \end{array}\right]$$

86 $z = y - \ln(x + y^2)$

$$\left[\begin{array}{l} D = \{(x, y) \in R^2 \,|\, x + y^2 > 0\} \\ z'_x = -\dfrac{1}{x + y^2}; \quad z'_y = 1 - \dfrac{2y}{x + y^2} \\ z''_{xx} = \dfrac{1}{(x + y^2)^2}; \quad z''_{yy} = \dfrac{2(y^2 - x)}{(x + y^2)^2}; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{2y}{(x + y^2)^2} \end{array}\right]$$

87 $z = e^{x^2 - 3y}$

$$\left[\begin{array}{l} D = R^2 \\ z'_x = 2x\, e^{x^2 - 3y}; \quad z'_y = -3\, e^{x^2 - 3y} \\ z''_{xx} = (4x^2 + 2)\, e^{x^2 - 3y}; \quad z''_{yy} = 9\, e^{x^2 - 3y}; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = -6x\, e^{x^2 - 3y} \end{array}\right]$$

88 $z = x^2 + \sqrt{xy}$

$$\left[\begin{array}{l} D = \{(x, y) \in R^2 \,|\, xy \geq 0\} \\ z'_x = \dfrac{\sqrt{xy} + 4x^2}{2x}; \quad z'_y = \dfrac{\sqrt{xy}}{2y} \\ z''_{xx} = \dfrac{8x^2 - \sqrt{xy}}{4x^2}; \quad z''_{yy} = -\dfrac{\sqrt{xy}}{4y^2}; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{1}{4\sqrt{xy}} \end{array}\right]$$

89 $z = \dfrac{x - y}{x^2}$

$$\left[\begin{array}{l} D = \{(x, y) \in R^2 \,|\, x \neq 0\} \\ z'_x = \dfrac{2y - x}{x^3}; \quad z'_y = -\dfrac{1}{x^2} \\ z''_{xx} = \dfrac{2(x - 3y)}{x^4}; \quad z''_{yy} = 0; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{2}{x^3} \end{array}\right]$$

90 $z = x \sin y + y \cos x$

$$\left[\begin{array}{l} D = R^2 \\ z'_x = \sin y - y \sin x; \quad z'_y = \cos x + x \cos y \\ z''_{xx} = -y \cos x; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = \cos y - \sin x; \quad z''_{yy} = -x \sin y \end{array}\right]$$

91 $z = \dfrac{x^2}{3x - y}$

$$\left[\begin{array}{l} D = \{(x, y) \in R^2 \,|\, 3x - y \neq 0\} \\ z'_x = \dfrac{x(3x-2y)}{(3x-y)^2}; \quad z'_y = \dfrac{x^2}{(3x-y)^2} \\ z''_{xx} = \dfrac{2y^2}{(3x-y)^3}; \quad z''_{yy} = \dfrac{2x^2}{(3x-y)^3}; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{2xy}{(y-3x)^3} \end{array}\right]$$

92 $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\left[\begin{array}{l} D = R^2 - (0, 0) \\ z'_x = \dfrac{x}{x^2+y^2}; \quad z'_y = \dfrac{y}{x^2+y^2} \\ z''_{xx} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad z''_{yy} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{array}\right]$$

93 $z = (x+1)(y-5)(xy + y^3 - 3)$

$$\left[\begin{array}{l} D = R^2 \\ z'_x = (y-5)(2xy + y^3 + y - 3) \\ z'_y = (x+1)(2xy - 5x + 4y^3 - 15y^2 - 3) \\ z''_{xx} = (y-5)2y; \quad z''_{yy} = 2(x+1)(x + 6y^2 - 15y) \\ z''_{xy} = z''_{yx} = 4y^3 + 4xy - 15y^2 + 2y - 10x - 8 \end{array}\right]$$

94 $z = x + y \cos (x^2 y)$

$$\left[\begin{array}{l} D = R^2 \\ z'_x = 1 - 2xy^2 \sin (x^2y); \quad z'_y = \cos (x^2y) - x^2y \sin (x^2y) \\ z''_{xx} = -2y^2[\sin (x^2y) + 2x^2y \cos (x^2y)]; \quad z''_{yy} = -x^4y \cos (x^2y) - 2x^2 \sin (x^2y) \\ z''_{xy} = z''_{yx} = -2xy[2 \sin (x^2y) + x^2y \cos (x^2y)] \end{array}\right]$$

95 $z = x^y$

$$\left[\begin{array}{l} D = \{(x, y) \in R^2 \,|\, x > 0\} \\ z'_x = yx^{y-1}; \quad z'_y = x^y \ln x \\ z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}; \quad z''_{yy} = x^y \ln^2 x; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = x^{y-1}(1 + y \ln x) \end{array}\right]$$

IL DIFFERENZIALE TOTALE

la teoria è a pag. 8

RICORDA

- Data una funzione $f(x, y)$ ed un punto $P(x_0, y_0)$ del suo dominio si definisce:
  - differenziale parziale rispetto alla variabile x relativo a P e all'incremento $\triangle x$ l'espressione $f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x$
  - differenziale parziale rispetto alla variabile y relativo a P e all'incremento $\triangle y$ l'espressione $f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$
  - differenziale totale relativo a P e agli incrementi $\triangle x$ e $\triangle y$ la somma dei due differenziali parziali: $df = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$

Comprensione

96 Barra vero o falso.

Se una funzione $f(x, y)$

a. è derivabile parzialmente rispetto a x e rispetto a y in un punto P allora è continua in P V F

b. è continua in un punto P allora in tale punto è derivabile parzialmente rispetto ad entrambe le variabili V F

c. è differenziabile in un punto P allora è continua in P V F

d. è differenziabile parzialmente rispetto a y in P allora è continua in P. V F

97 Il differenziale totale della funzione $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$ nel generico punto (x, y) è uguale a:

a. $dz = \dfrac{x^2 + y^2}{xy} dx - \dfrac{x^2 + y^2}{xy} dy$

b. $dz = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 y} dx + \dfrac{x^2 + y^2}{xy^2} dy$

c. $dz = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 y} dx - \dfrac{x^2 + y^2}{xy^2} dy$

d. $dz = -\dfrac{x^2 + y^2}{xy^2} dx + \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 y} dy$

98 Un valore approssimato dell'espressione $\sqrt{4{,}2} + \sin 0{,}15$ è definito dal differenziale totale della funzione $f(x \cdot y) = \sqrt{x} + \sin y$. Tale valore si calcola con l'espressione:

a. $\left(\dfrac{1}{4} \cdot 0{,}2 - 1 \cdot 0{,}15\right)$

b. $\left(\dfrac{1}{4} \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}15\right)$

c. $2 + \left(\dfrac{1}{4} \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}15\right)$

d. $2 - \left(\dfrac{1}{4} \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}15\right)$

Applicazione

Calcola il differenziale totale delle seguenti funzioni.

99 **ESERCIZIO GUIDA**

$f(x, y) = x^2 + y^3$

Si ha che $f'_x = 2x, \qquad f'_y = 3y^2,$

quindi $df = 2xdx + 3y^2 dy.$

100 $f(x, y) = e^{2x-y}$ $\quad [2e^{2x-y}\, dx - e^{2x-y}\, dy]$

101 $f(x, y) = 2x \ln y$ $\quad \left[2 \ln y\, dx + 2\dfrac{x}{y}\, dy\right]$

102 $f(x, y) = (2x - 5)(4 - 3y)$ $\quad [2(4 - 3y)\, dx - 3(2x - 5)\, dy]$

103 $f(x, y) = (x + 2)e^{\sqrt{y}}$ $\quad \left[e^{\sqrt{y}}\, dx + \dfrac{(x+2)e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}\, dy\right]$

104 $f(x, y) = e^x + e^y$ $\quad [e^x\, dx + e^y\, dy]$

105 $f(x, y) = 2x^3 - 3xy^2$ $\quad [(6x^2 - 3y^2)\, dx - 6xy\, dy]$

106 $f(x, y) = y^x$ $\quad [y^x \ln y\, dx + xy^{x-1}\, dy]$

107 $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y}}{x}$ $\quad \left[-\dfrac{x + 2y}{2x^2\sqrt{x + y}}\, dx + \dfrac{1}{2x\sqrt{x + y}}\, dy\right]$

108 Servendoti del differenziale totale della funzione $z = \sin x + \ln y$ nel punto $(0, 1)$, calcola un valore approssimato di $z = \sin 0{,}51 + \ln 1{,}3$. [0,81]

109 Calcola un valore approssimato di $3{,}21^{2{,}25}$ servendoti del differenziale della funzione $z = x^y$ nel punto $(3, 2)$. [12,7319]

LA RICERCA DEI MASSIMI E DEI MINIMI

la teoria è a pag. 9

RICORDA

- Si dice hessiano di una funzione f il determinante $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$
- I punti stazionari di una funzione $f(x, y)$ sono i punti soluzione del sistema: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$
- Sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto stazionario per f; allora
  - se $H(x_0, y_0) > 0$ e $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, P_0 è un punto di massimo
  - se $H(x_0, y_0) > 0$ e $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, P_0 è un punto di minimo
  - se $H(x_0, y_0) < 0$, P_0 è un punto di sella
  - se $H(x_0, y_0) = 0$, non si può dire nulla su P_0

Comprensione

110 Se una funzione $f(x, y)$ di dominio D ha un punto di massimo o di minimo in $P_0(x_0, y_0)$ interno a D, allora le derivate prime parziali di f rispetto a x e rispetto a y si annullano in P_0.
Questa proprietà è una condizione solo necessaria, solo sufficiente oppure necessaria e sufficiente affinché P_0 sia un punto di massimo o di minimo per f?

111 Quale tra i seguenti determinanti rappresenta l'hessiano della funzione $f(x, y) = x^2 - y^3 + 6xy$?

a. $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 6 & -6y \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -6y \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -6y & 6 \end{vmatrix}$ **d.** $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -6y \end{vmatrix}$

112 Per la funzione $f(x, y) = x^2 - y^3 + 6xy$ l'origine è:
a. un punto di massimo **b.** un punto di minimo **c.** un punto di sella
d. un punto senza caratteristiche particolari

Applicazione

Determina la natura dei punti stazionari delle seguenti funzioni utilizzando il metodo delle derivate.

113 **ESERCIZIO GUIDA**

$f(x, y) = 4x + y^2 - x^2$

Trova i punti stazionari risolvendo il sistema $\begin{cases} 4 - 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$

Il solo punto stazionario ha coordinate .... ed è $H(x, y) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$

Il tale punto si ha che l'hessiano è negativo, quindi ....

114 $f(x, y) = 2x + 4y - 7$ [nessun punto stazionario]

115 $f(x, y) = 7y - x + 8$ [nessun punto stazionario]

116 $f(x, y) = \frac{x}{y}$ [nessun punto stazionario]

117 $f(x, y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 - 9$ [minimo in $(2, 3)$; $f(2, 3) = -9$]

118 $f(x, y) = (x+1)^2 + (y-5)^2 + 3$ [minimo in $(-1, 5)$; $f(-1, 5) = 3$]

119 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4y + 3$ [minimo in $(0, 1)$; $f(0, 1) = 1$]

120 $f(x, y) = -2x^2 - 2y^2 - xy + 8x + 2y - 9$ [massimo in $(2, 0)$; $f(2, 0) = -1$]

121 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 9$ [minimo in $(1, 1)$; $f(1, 1) = 7$]

122 $f(x, y) = 2,5x^2 + 3y^2 - 3xy - 14x + 21y + 35,5$ [minimo in $(1, -3)$; $f(1, -3) = -3$]

123 $f(x, y) = 2x^2 + 1,5y^2 - 3xy - 18x + 6y + 90$ [minimo in $(12, 10)$; $f(12, 10) = 12$]

124 $f(x, y) = -x^2 - 3y^2 - 0,5xy + 40x + 245y - 5090$ [massimo in $(10, 40)$; $f(10, 40) = 10$]

125 $f(x, y) = xy - 2$ [punto di sella in $(0, 0)$; $f(0, 0) = -2$]

126 $f(x, y) = (x-3)(y+4)$ [punto di sella in $(3, -4)$; $f(3, -4) = 0$]

127 $f(x, y) = y^2 - x^2 + 3$ [punto di sella in $(0, 0)$; $f(0, 0) = 3$]

128 $f(x,y) = -x^2 + 2y^2 + 10xy - 10x - 4y + 3$ [punto di sella in $(0, 1)$; $f(0, 1) = 1$]

129 $f(x, y) = -x^2 + 2y^2 + xy + 1$ [punto di sella in $(0, 0)$; $f(0, 0) = 1$]

130 $f(x, y) = x^2 + 1,5y^2 + 10xy + 14x - 24y - 55$ [punto di sella in $(3, -2)$; $f(3, -2) = -10$]

131 $f(x, y) = 3,5x^2 + 2,5y^2 + 12xy - 71x - 75y + 291$ [punto di sella in $(5, 3)$; $f(5, 3) = 1$]

132 $f(x, y) = -x^2 + y^2 - 6xy + x$ $\left[\text{punto di sella in } \left(\frac{1}{20}, \frac{3}{20}\right); f\left(\frac{1}{20}, \frac{3}{20}\right) = \frac{1}{40}\right]$

133 $f(x, y) = -3x^2 - 3y^2 + 6xy + 5x - 6y - 2$ [nessun punto stazionario]

134 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy - x + 2y + 1$ [punto di sella in $(-10, 7)$]

135 $f(x, y) = 9x^2 + y^2 - 6xy - 8y$ [nessun punto stazionario]

136 $f(x, y) = -2y^3 + y^2x - 2y + x - 1$ [nessun punto stazionario]

137 $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2y - y^2 - 2y$

$$\left[\begin{array}{l} \text{massimo in } P(0, -1);\ f(P) = 1 \\ \text{punto di sella in } A\left(\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}, \dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right);\ f(A) = \dfrac{-20-14\sqrt{7}}{27} \\ \text{punto di sella in } B\left(\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}, \dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right);\ f(B) = \dfrac{-20+14\sqrt{7}}{27} \end{array}\right]$$

138 $f(x, y) = -x^3 + \dfrac{1}{3}x^2y - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}xy + x$

[punto di sella in $(-2, -11)$; $f(-2; -11) = 6$; punto di sella in $(1; 2)$; $f(1; 2) = 0$]

139 $f(x, y) = -2x^3 + 4y^2 - 2x^2y - 1 + y$

$$\left[\begin{array}{l} \text{minimo in } \left(0, -\dfrac{1}{8}\right);\ f\left(0, -\dfrac{1}{8}\right) = -\dfrac{17}{16} \\ \text{punto di sella in } A\left(-3-\dfrac{1}{2}\sqrt{38}, \dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{4}\sqrt{38}\right);\ f(A) = \dfrac{115}{2} + \dfrac{19}{2}\sqrt{38} \\ \text{punto di sella in } B\left(-3+\dfrac{1}{2}\sqrt{38}, \dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{4}\sqrt{38}\right);\ f(B) = \dfrac{115}{2} - \dfrac{19}{2}\sqrt{38} \end{array}\right]$$

140 $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + \dfrac{1}{2}x^2y - \dfrac{1}{2}y$

[punto di sella in $(1, 5)$; $f(1, 5) = -3$; punto di sella in $(-1, 11)$; $f(-1, 11) = -5$]

141 $f(x, y) = \dfrac{1}{3}x^3 + y^2 - xy^2 + 2y$

$$\left[\begin{array}{l} \text{punto di sella in } A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\ f(A) = \dfrac{7}{6} + \dfrac{5}{6}\sqrt{5} \\ \text{punto di sella in } B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\ f(B) = \dfrac{7}{6} - \dfrac{5}{6}\sqrt{5} \end{array}\right]$$

142 $f(x, y) = \dfrac{1}{3}x^3 + y^2 + xy^2 - 4x$

$$\left[\begin{array}{l} \text{minimo in } (2, 0);\ f(2, 0) = -\dfrac{16}{3};\ \text{massimo in } (-2, 0);\ f(-2, 0) = \dfrac{16}{3} \\ \text{punto di sella in } (-1, \sqrt{3});\ f(-1, \sqrt{3}) = \dfrac{11}{3};\ \text{punto di sella in } (-1, -\sqrt{3});\ f(-1, -\sqrt{3}) = \dfrac{11}{3} \end{array}\right]$$

143 $f(x, y) = \dfrac{4}{3}x^3 + 2xy^2 + 2y^3 - 4x$

$$\left[\begin{array}{l} \text{minimo in } (1, 0);\ f(1, 0) = -\dfrac{8}{3} \\ \text{massimo in } (-1, 0);\ f(-1, 0) = \dfrac{8}{3} \\ \text{punto di sella in } A\left(-\dfrac{3}{11}\sqrt{11}, \dfrac{2}{11}\sqrt{11}\right);\ f(A) = \dfrac{8}{11}\sqrt{11} \\ \text{punto di sella in } B\left(\dfrac{3}{11}\sqrt{11}, -\dfrac{2}{11}\sqrt{11}\right);\ f(B) = -\dfrac{8}{11}\sqrt{11} \end{array}\right]$$

144 $f(x, y) = 2x^2y + xy^2 + 6xy$

$$\left[\begin{array}{l} \text{punto di sella in } (0, 0);\ f(0, 0) = 0;\ \text{punto di sella in } (0, -6);\ f(0, -6) = 0 \\ \text{punto di sella in } (-3, 0);\ f(-3, 0) = 0;\ \text{massimo in } (-1, -2);\ f(-1, -2) = 4 \end{array}\right]$$

145 $f(x, y) = -x^3 + 3y^3 - 36y + 12x + 3$

$$\left[\begin{array}{l} \text{punto di sella in } (2, 2);\ f(2, 2) = -29;\ \text{punto di sella in } (-2, -2);\ f(-2, -2) = 35 \\ \text{massimo in } (2, -2);\ f(2, -2) = 67;\ \text{minimo in } (-2, 2);\ f(-2, 2) = -61 \end{array}\right]$$

146 $f(x, y) = \dfrac{1}{4}x^3 - \dfrac{9}{4}xy^2 - 3x^2 + \dfrac{27}{2}y^2 + 9x - 27y + 1 + \dfrac{9}{2}xy$

$$\left[\begin{array}{l} \text{punto di sella in } (3, 1);\ f(3, 1) = 1;\ \text{minimo in } (5, 1);\ f(5, 1) = 0 \\ \text{punto di sella in } (6, 0);\ f(6, 0) = 1;\ \text{punto di sella in } (6, 2);\ f(6, 2) = 1 \end{array}\right]$$

147 $f(x, y) = \frac{2}{3}x^3 + x^2y + y^2 + 8x^2$ $\left[\begin{array}{l} \text{minimo in } (0, 0);\ f(0, 0) = 0 \\ \text{punto di sella in } A(1+\sqrt{17}, -9-\sqrt{17});\ f(A) = \frac{242}{3} + \frac{34}{3}\sqrt{17} \\ \text{punto di sella in } B(1-\sqrt{17}, -9+\sqrt{17});\ f(B) = \frac{242}{3} - \frac{34}{3}\sqrt{17} \end{array}\right]$

148 $f(x, y) = y^3 + x^3 - x^2y - 4y$ $\left[\begin{array}{l} \text{punto di sella in } \left(0, \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\right);\ f\left(0, \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \mp\frac{16}{9}\sqrt{3} \\ \text{minimo in } A\left(\frac{4}{23}\sqrt{23}, \frac{6}{23}\sqrt{23}\right);\ f(A) = -\frac{16}{23}\sqrt{23} \\ \text{massimo in } B\left(-\frac{4}{23}\sqrt{23}, -\frac{6}{23}\sqrt{23}\right);\ f(B) = \frac{16}{23}\sqrt{23} \end{array}\right]$

Per la verifica delle competenze

1 Calcola le derivate parziali prime della funzione $f(x, y) = \arctan\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$
e verifica che risulta $xf'_x + yf'_y = 0$.

2 Calcola le derivate parziali prime della funzione $f(x, y) = \sqrt{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}$
e verifica che risulta $xf'_x + yf'_y = \frac{3}{2}f(x, y)$.

3 Calcola le derivate parziali della funzione $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
e verifica che risulta $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$, $f''_{xy} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

4 Data la funzione $f(x, y) = 2x^2 - ky^2 + (k-1)xy - 2(k+1)x$, determina il valore del parametro k in modo che essa abbia in $P\left(\frac{24}{17}, \frac{6}{17}\right)$ un punto di sella. $[k = 2]$

5 Data la funzione di equazione $z = ax^4 + by^4 + cxy$, determina i valori dei parametri a, b, c in modo che essa abbia un punto estremante in $P(1, 1, -2)$. Stabilisci poi la natura di tale punto e se esistono altri estremanti. [$a = 1$, $b = 1$, $c = -4$; $m(1, 1, -2)$, $m(-1, -1, -2)$; punto di sella nell'origine]

6 Data la funzione $f(x, y) = ax^2y + bxy^2 + cxy$, determina i valori dei parametri a, b, c in modo che essa abbia punti estremanti in $(0, 1)$ e $(2, 0)$ e che passi per il punto $A\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{27}\right)$. Stabilisci poi la natura di tali punti e se esistono altri estremanti.
[$a = 1$, $b = 2$, $c = -2$; punti di sella nell'origine e in $(0, 1)$, $(2, 0)$; il punto A è un minimo]

Soluzioni esercizi di comprensione

1 **a.**	**2** f'_x : **a.**; f'_y : **d.**	**3** **b.**	**4** **c.**
96 **a.** F, **b.** F, **c.** V, **d.** F,	**97** **c.**	**98** **c.**	**110** necessaria
111 **b.**	**112** **c.**		

Test finale di autovalutazione

1 Della funzione $f(x, y) = \sqrt{xy} + \ln\sqrt{x^2 + 4y^2}$ si può dire che:

① f'_x è uguale a: **a.** $\dfrac{\sqrt{xy}}{2x} + \dfrac{x}{x^2 + 4y^2}$ **b.** $\dfrac{1}{2\sqrt{xy}} + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}$ **c.** $\dfrac{y}{2\sqrt{xy}} + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}$

② f'_y è uguale a: **a.** $\dfrac{1}{2\sqrt{xy}} + \dfrac{8y}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{xy}}{2y} + \dfrac{4y}{x^2 + 4y^2}$ **c.** $\dfrac{x}{2\sqrt{xy}} + \dfrac{8y}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}$

6 punti

2 Il piano tangente alla funzione $z = \dfrac{x^2 - y}{x}$ nel punto $P(1, 2)$ ha equazione:

a. $z = 3x - y$ **b.** $z = 3x + y + 1$ **c.** $z = -2x - 3y - 1$ **d.** $z = 3x - y - 2$

5 punti

3 Considerata una qualsiasi funzione $f(x, y)$, i punti stazionari si ottengono:

a. risolvendo il sistema $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f''_{xx} = 0 \end{cases}$ **b.** risolvendo il sistema $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$

c. risolvendo separatamente le equazioni $f'_x = 0$ e $f'_y = 0$ e combinando i risultati in tutti i modi possibili.

2 punti

4 Calcola le derivate parziali prime rispetto a x e rispetto a y delle seguenti funzioni:

a. $z = 2x^4 - 5x^2 + 2xy^2 - 5$ **b.** $z = 5x^2y^3 + 2\sqrt{xy}$

c. $z = 3\ln x + \sqrt{x^2 - y^2}$ **d.** $z = e^{\sqrt{xy}} + \ln x$

8 punti

5 Calcola l'equazione del piano tangente alla superficie data nel punto indicato:

a. $z = 3xy + 1$ in $P(0, 2)$

b. $z = x^3 - 8\sqrt{x} + \sqrt{y}$ in $P(4, 1)$

10 punti

6 Data la funzione $z = 2x^2 - 3y^2$, determina il piano ad essa tangente che è parallelo al piano xy.

5 punti

7 Calcola le derivate parziali seconde delle seguenti funzioni:

a. $z = 2x^3 - 3xy + y^2 - 5$ **b.** $z = -x^2 + \ln xy + 3y^2$

8 punti

8 Calcola il differenziale totale delle seguenti funzioni:

a. $z = e^{2x} + 3x^2y$ **b.** $z = \ln 2y + x^3$

8 punti

9 Trova i punti stazionari delle seguenti funzioni e stabiliscine la natura:

a. $f(x, y) = -x^2 + 3y^2 + 4xy - 6x - 2y + 5$

b. $f(x, y) = e^x(x + y^2)$

10 punti

10 Calcola un valore approssimato della funzione $z = \log_{10,1} 1001{,}3$ usando il differenziale della funzione $z = \log_x y$ nel punto $(10, 1000)$.

8 punti

11 Determina il valore del parametro k in modo che la funzione di equazione $z = kx^2 + y^2 + 2xy - 4y$ non abbia punti stazionari.

10 punti

12 Determina il valore dei parametri a e b in modo che la funzione di equazione $z = 2x^2 + ay^2 + 2bx + 6y$ abbia un punto stazionario in $(-2, 1)$; determina poi la natura di tale punto e se esistono altri punti stazionari.

10 punti

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Totale
Punteggio													

Voto: $\dfrac{\text{totale}}{10} + 1 =$

Soluzioni

1 ① **a.**, ② **b.**

2 **d.**

3 **b.**

4 **a.** $z'_x = -10x + 8x^3 + 2y^2$, $z'_y = 4xy$; **b.** $z'_x = \dfrac{\sqrt{xy}}{x} + 10xy^3$, $z'_y = \dfrac{\sqrt{xy}}{y} + 15x^2y^2$;

c. $z'_x = \dfrac{3\sqrt{x^2 - y^2} + x^2}{x\sqrt{x^2 - y^2}}$, $z'_y = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; **d.** $z'_x = \dfrac{\sqrt{xy} \cdot e^{\sqrt{xy}} + 2}{2x}$, $z'_y = \dfrac{\sqrt{xy} \cdot e^{\sqrt{xy}}}{2y}$

5 **a.** $z = 1 + 6x$; **b.** $z = 46x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{271}{2}$

6 $z = 0$

7 **a.** $z''_{xx} = 12x$, $z''_{yy} = 2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -3$; **b.** $z''_{xx} = -\dfrac{1}{x^2} - 2$, $z''_{yy} = 6 - \dfrac{1}{y^2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 0$

8 **a.** $(2e^{2x} + 6xy)dx + 3x^2dy$; **b.** $3x^2dx + \dfrac{1}{y}dy$

9 **a.** punto di sella in $(-1,1)$; $f(-1,1) = 7$; **b.** minimo in $(-1,0)$; $f(-1,0) = -\dfrac{1}{e}$

10 2,988

11 $k = 1$

12 $a = -3$, $b = 4$; $(-2,1)$ punto di sella, non esistono altri punti stazionari