APPROFONDIMENTO

Il calcolo del valore attuale utilizzando il montante

Un altro modo per calcolare il valore attuale di una rendita è quello di considerare il suo montante all'epoca della scadenza e di attualizzare il valore ottenuto.

Nel caso di rendita posticipata:

- montante alla scadenza: $M = R \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$
- valore attuale al tempo zero (attualizzazione per n periodi): $V = R \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)^{-n}$

  cioè svolgendo i calcoli: $V = R \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Abbiamo così ritrovato la formula $V = R \cdot a_{\overline{n}|i}$.

Nel caso di rendita anticipata:

- montante alla scadenza: $M = R \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$
- valore attuale al tempo zero (attualizzazione per n periodi): $V = R \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i) \cdot (1+i)^{-n}$

  cioè svolgendo i calcoli: $V = R \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$

Abbiamo così ritrovato la formula $V = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$.

Confrontando le relazioni ottenute possiamo anche stabilire il legame tra i simboli $s_{\overline{n}|i}$ e $a_{\overline{n}|i}$; risulta che:

$$\boxed{s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^n} \qquad \boxed{\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^n}$$

Queste formule consentono di passare dal valore attuale di una rendita al suo montante e viceversa, risparmiando spesso calcoli più laboriosi.

Esempio

Di una rendita della durata di 19 anni a cui è stato applicato il tasso annuo del 3% si sa che all'atto dell'ultimo versamento si avrà un montante di € 35000. Calcoliamo il valore attuale di tale rendita.
Poiché conosciamo il montante possiamo calcolare immediatamente il valore attuale:

$$V = 35000(1+0{,}03)^{-19} = 19960{,}01(€)$$

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

Determiniamo il montante, all'atto dell'ultimo versamento, di una rendita formata da 15 rate annue posticipate di € 1600 ciascuna, sapendo che il tasso annuo, inizialmente del 2,5%, è stato portato al 3% subito dopo il versamento dell'ottava rata.

Possiamo considerare la rendita come composta dalla somma di altre due: la prima di 8 rate al tasso del 2,5%, da capitalizzare per altri 7 anni; la seconda di 7 rate al tasso del 3%.
Abbiamo quindi che

$$M = 1600 \cdot \frac{(1+0{,}025)^8 - 1}{0{,}025} \cdot (1+0{,}03)^7 + 1600 \cdot \frac{(1+0{,}03)^7 - 1}{0{,}03} = 29450{,}85\,(€)$$

2 Un tale ha versato per 8 anni consecutivi € 1200 all'anno alla fine dell'anno. Il tasso di interesse, inizialmente del 2%, è stato portato al 2,25% dopo il versamento della terza rata. Calcola la somma a disposizione di questa persona all'atto dell'ultimo versamento e un anno dopo. [€ 10380,79; € 10614,36]

3 Lina ha versato per 12 anni consecutivi i proventi di un lavoro extra che le hanno fruttato € 2300 all'anno. Il tasso, inizialmente del 3%, è sceso al 2,5% dopo il nono versamento. Quale somma avrà a disposizione Lina all'atto dell'ultimo versamento e un anno dopo? [€ 32236,50; € 33042,41]

4 Si sono versate per 18 anni consecutivi € 800 all'anno presso una banca. Il tasso annuo, inizialmente del 2%, è stato ridotto all'1,8% dopo il pagamento della sesta rata ed è stato portato all'1,9% dopo il pagamento della dodicesima rata. Calcola il montante all'atto dell'ultimo versamento. [€ 16943,55]

5 Hai versato alla fine di ogni trimestre € 600 per 5 anni. Il tasso, inizialmente del 12% nominale annuo convertibile trimestralmente, è stato ridotto al 9% nominale annuo convertibile trimestralmente dopo il versamento della settima rata. Calcola il montante all'atto dell'ultimo versamento. [€ 15084,60]

6 Mario ha versato in banca 4000 alla fine di ogni anno per 15 anni. Trova il montante all'atto dell'ultimo versamento sapendo che il tasso annuo era inizialmente del 4,5% e che è stato diminuito di un punto percentuale dopo il quarto versamento. [€ 77366,80]

7 Trova il montante all'atto dell'ultimo versamento di una rendita costituita da 30 rate annue di cui le prime 10 di importo € 1000, le successive 8 di € 1600 e le restanti di € 2000. Il tasso applicato è del 3,5%. [€ 74431,57]

8 Federica cede a un creditore, al quale deve una somma di € 25000, una rendita formata da 6 rate annue posticipate, di cui le prime tre di importo € 3000 e le ultime tre di rata doppia delle prime. Se la valutazione della rendita viene fatta ad un tasso di valutazione del 5%, si riesce ad estinguere il debito? [valore della rendita: € 22284,40]

9 Una rendita posticipata di 27 rate annue ha importi diversi: € 6000 le prime otto, € 9000 le successive quattro, € 15000 le rimanenti. Calcola il valore attuale della rendita al tasso annuo del 18%. [€ 48835,82]

10 Calcola il valore attuale di una rendita formata da 25 rate quadrimestrali, sapendo che le prime sei sono di € 900 e le restanti di € 1250. Il tasso applicato è del 3,25% quadrimestrale. [€ 18096,50]

11 Trova il montante, all'atto dell'ultimo versamento, di una rendita formata da 18 rate di cui le prime dieci di € 750 e le rimanenti di € 1100. Il tasso è del 5%. [€ 24537,23]

12 Serena versa all'inizio di ogni anno e per 6 anni € 900 all'anno e € 1200 all'anno per i successivi 12 anni. Calcola di quanto può disporre un periodo dopo l'ultimo versamento, sapendo che per i primi 6 anni è stato applicato il tasso del 6% e successivamente il tasso del 6,25%. [€ 35632,27]

Dimostra le seguenti uguaglianze.

13 $s_{\overline{3}|i} + a_{\overline{7}|i} = a_{\overline{10}|i} \cdot (1+i)^3$

14 $s_{\overline{3}|i} + a_{\overline{7}|i} = s_{\overline{10}|i} \cdot (1+i)^{-7}$

15 $s_{\overline{3}|i} + a_{\overline{15}|i} = s_{\overline{25}|i} \cdot (1+i)^{-15}$

16 $s_{\overline{10}|i} + a_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i} \cdot (1+i)^{10}$

17 $1 + i \cdot s_{\overline{12}|i} = (1+i)^{12}$

18 Il montante di una rendita anticipata di tasso 6% e della durata di 10 anni è € 34560. Qual è il suo valore attuale? [€ 19298,12]