Concetti chiave e regole

Le sezioni di un cono con un piano

La curva che si ottiene sezionando un cono circolare retto con un piano si chiama **conica**. Indicato con α l'angolo formato dall'asse del cono con una generatrice e con β l'angolo formato dal piano con l'asse del cono si ottiene:

se il piano non passa per il vertice	*se il piano passa per il vertice*
se $\beta > \alpha$ un'ellisse o una circonferenza	un'ellisse o una circonferenza che degenerano in un punto
se $\beta = \alpha$ una parabola	una parabola che degenera in una generatrice del cono
se $\beta < \alpha$ un'iperbole	un'iperbole che degenera in una coppia di rette generatrici

L'equazione di una conica

Una conica è sempre rappresentata da un'equazione di secondo grado nelle variabili x e y:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Viceversa un'equazione di questo tipo che abbia punti reali rappresenta sempre una conica, eventualmente degenere. Per riconoscere il tipo di conica si deve valutare il suo discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

- se $\Delta < 0$ la conica è un'ellisse
- se $\Delta = 0$ la conica è una parabola
- se $\Delta > 0$ la conica è un'iperbole.

Un'altra definizione di conica

Una conica si può anche definire come luogo dei punti P per i quali rimane costante il rapporto fra la distanza di P da un punto F (fuoco) e da una retta d (direttrice). Tale rapporto prende il nome di **eccentricità** e si indica con e. Si verifica che si ottiene:

- un'ellisse se $0 \leq e < 1$
- una parabola se $e = 1$
- un'iperbole se $e > 1$.

I grafici delle funzioni irrazionali e con i moduli

- Per tracciare il grafico della funzione $y = \sqrt{f(x)}$, posta la condizione $f(x) \geq 0$, si costruisce il grafico di $y^2 = f(x)$ e di tale grafico si considera solo la parte che appartiene al semipiano positivo o nullo delle ordinate.

  Analogamente, per tracciare il grafico della funzione $y = -\sqrt{f(x)}$, posta la condizione $f(x) \geq 0$, si costruisce il grafico di $y^2 = f(x)$ e di tale grafico si considera solo la parte che appartiene al semipiano negativo o nullo delle ordinate.
- Per tracciare il grafico della funzione $y = |f(x)|$ si costruisce quello di $y = f(x)$ e si ribaltano le sue parti negative nel semipiano positivo delle ordinate.
- Il grafico di $y = |f(x)| + k$ è il traslato di quello di $y = |f(x)|$ del vettore $\vec{v} = (0, k)$.
- Per costruire il grafico della funzione $y = |f(x)| + g(x)$, si stabilisce come varia il segno di $f(x)$ e si rappresenta la funzione ottenuta nei diversi intervalli di variazione.

La risoluzione grafica di equazioni e disequazioni

- Per risolvere graficamente un'equazione della forma $f(x) = g(x)$, oppure l'analoga disequazione $f(x) \gtrless g(x)$ si disegnano i grafici delle due funzioni e si individua se esistono punti di intersezione:
  - le ascisse di tali punti sono le soluzioni dell'equazione
  - gli intervalli sull'asse x per i quali il grafico di $f(x)$ assume valori maggiori (oppure minori) del grafico di $g(x)$ sono le soluzioni della disequazione.

- Per risolvere la disequazione in due variabili $f(x, y) \gtreqless 0$:
  - si traccia il grafico della curva di equazione $f(x, y) = 0$ e si individuano le regioni di piano da esso delimitate
  - si considera un punto qualunque $P(x_0, y_0)$ in una regione e si valuta $f(x_0, y_0)$
  - se le coordinate di P soddisfano la disequazione, la regione che lo contiene appartiene all'insieme delle soluzioni.

Zeri di funzioni e risoluzione approssimata delle equazioni

- **Zero** di una funzione $f(x)$ è l'ascissa x_0 del punto in cui la funzione f interseca l'asse x. L'esistenza degli zeri di una funzione è garantita dal seguente teorema:
  Una funzione continua $f(x)$ possiede almeno uno zero in un intervallo (a, b) se $f(a) \cdot f(b) < 0$.

- Per trovare in modo approssimato le soluzioni di un'equazione polinomiale $ax^n + bx^{n-1} + ... + cx + d = 0$ si deve:
  - rappresentare graficamente la funzione $y = ax^n + bx^{n-1} + ... + cx + d$ e stabilire se esistono degli zeri
  - individuare un intervallo che contiene lo zero
  - trovare un suo valore approssimato applicando il metodo delle sostituzioni successive oppure il metodo di bisezione.