



Esercizi di consolidamento

Problemi sull'ellisse

1 Individua le caratteristiche delle seguenti ellissi e costruiscine poi il grafico:

a. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

b. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

c. $4x^2 + 25y^2 = 4$.

2 Determina l'eccentricità delle seguenti ellissi:

a. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{3} = 1$

b. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{64} = 1$

[a. $\sqrt{\frac{7}{10}}$; b. $\frac{\sqrt{14}}{4}$]

3 Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha fuoco nel punto $F(0, -\sqrt{23})$ e semiasse maggiore lungo 6.

$\left[\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{36} = 1 \right]$

4 L'asse focale di un'ellisse è quello delle ascisse ed è lungo 18, inoltre un vertice della curva è nel punto $V(0, -5)$. Scrivi la sua equazione.

$\left[\frac{x^2}{106} + \frac{y^2}{25} = 1 \right]$

5 Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha i vertici nei punti di coordinate $(0, 2)$ e $(3, 0)$.

$\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \right]$

6 Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha un vertice nel punto $A(-3, 0)$ e passa per $P(\sqrt{3}, \sqrt{2})$.

$\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1 \right]$

7 Scrivi l'equazione dell'ellisse sapendo che passa per i punti $A(3, 1)$ e $B(0, 2)$.

$\left[\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \right]$

8 Calcola il perimetro del triangolo F_1F_2P , dove F_1 e F_2 sono i fuochi dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ e P è un suo punto.

$[2p = 10]$

9 Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha i fuochi sull'asse y , eccentricità $e = \frac{2}{3}$ e un vertice nel punto $B(0, 6)$.

$\left[\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1 \right]$

10 Scrivi l'equazione dell'ellisse sapendo con un fuoco nel punto $(-3, 0)$ di eccentricità $e = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

$\left[\frac{x^2}{10} + y^2 = 1 \right]$

11 Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x di eccentricità $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e che passa per il punto di coordinate $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$.

$[4x^2 + 9y^2 = 32]$

12 Un'ellisse ha i fuochi di coordinate $\left(0, \pm \frac{a-1}{2}\right)$ e un vertice nel punto $V(0, a)$. Determina l'eccentricità e stabilisci quali valori può assumere il parametro a .

$[a \leq -1 \vee a \geq 1]$

13 Determina l'equazione dell'ellisse che passa per il punto di intersezione delle rette di equazione $y + x - 3 = 0$ e $y - x - 3 = 0$ e che ha un vertice nel punto $P(2, 0)$.

$\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right]$

- 14** Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$, determina se la retta $2x - 2y - 7 = 0$ è ad essa esterna, secante o tangente. [esterna]
- 15** La retta di equazione $y = \frac{1}{2}x + 1$ interseca un'ellisse nei suoi punti di ascissa 4 e -6 , determina l'equazione della curva. [$\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$]
- 16** Determina le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ uscenti dal punto $P(3, 0)$. [$y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}x \mp \frac{3\sqrt{5}}{5}$]
- 17** Scrivi le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 3y^2 = 4$ nel suo punto di ordinata 1 appartenente al primo quadrante. [$x + 3y = 4$]
- 18** Determina il valore del parametro a in modo che l'ellisse di equazione $x^2 + ay^2 = 15$ sia tangente alla retta $x + 2y - 5 = 0$. [$a = 6$]
- 19** Dopo aver scritto l'equazione dell'ellisse che passa per i punti $A(-1, 3)$ e $B(\sqrt{2}, \sqrt{6})$, trova le equazioni delle rette ad essa tangenti in A e B e la lunghezza della corda da esse intercettata sull'asse x . [$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1; x - y + 4 = 0; 3x + \sqrt{3}y - 6\sqrt{2} = 0; 2\sqrt{2} + 4$]

Problemi sull'iperbole

Delle seguenti iperboli determina l'asse focale, i vertici reali e immaginari, le coordinate dei fuochi, le equazioni degli asintoti e rappresentale graficamente.

- 20** $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$ $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{9} = -1$
- 21** $x^2 - 4y^2 = 1$ $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{6} = 1$
- 22** $3x^2 - y^2 = 12$ $5y^2 - 20x^2 = -80$
- 23** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = -1$ $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$
- 24** Scrivi l'equazione della simmetrica dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. [$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = -1$]
- 25** Scrivi l'equazione dell'iperbole sapendo che la sua eccentricità è $e = \frac{3}{2}$ e un vertice è nel punto di coordinate $(6, 0)$. [$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1$]
- 26** Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha un vertice nel punto $V(0, \sqrt{6})$ e passa per il punto $P(\sqrt{2}, 3)$. [$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = -1$]
- 27** Determina l'equazione dell'iperbole con un fuoco in $F(3, 0)$ e passante per il punto $P\left(\frac{\sqrt{14}}{2}, 1\right)$. [$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$]
- 28** Scrivi l'equazione dell'iperbole riferita al centro e agli assi passante per i punti $A(2, 3)$ e $B(3, 2\sqrt{6})$. [$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$]

29 Gli asintoti di un'iperbole con i fuochi sull'asse x hanno equazione $y = \pm \frac{4}{5}x$ e l'iperbole passa per il punto $(5\sqrt{2}; 4)$; qual è la sua equazione? [$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$]

30 Calcola la lunghezza della corda intercettata sulla retta $y = 2x$ dall'iperbole che ha vertici in $V(\pm 1, 0)$ e fuochi in $F(\pm\sqrt{10}, 0)$. [6]

31 Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = -1$, determina l'equazione delle rette ad essa tangenti che passano dal punto $P(0, 1)$. [$2y \pm x - 2 = 0$]

32 Scrivi l'equazione della tangente all'iperbole $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ nel suo punto di ascissa $\sqrt{10}$ appartenente al primo quadrante. [$2\sqrt{10}x - 5\sqrt{2}y - 10 = 0$]

33 Considerata l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ e il fascio di rette parallele di equazione $y = 3x + k$, determina per quali valori di k si ottengono:
a. le rette che non intersecano l'iperbole
b. le rette tangenti all'iperbole
c. le rette che intersecano l'iperbole in due punti distinti.

$$[\mathbf{a.} -\sqrt{30} < k < \sqrt{30}; \mathbf{b.} k = \pm\sqrt{30}; \mathbf{c.} k < -\sqrt{30} \vee k > \sqrt{30}]$$

34 Data l'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$, trova le equazioni delle rette ad essa tangenti che sono parallele alle bisettrici dei quadranti. [$y = \pm x \pm \sqrt{3}$]

35 Determina il valore da attribuire all'incognita k in modo che il rapporto $\frac{k-3}{1-k}$ rappresenti l'eccentricità di una iperbole. [$1 < k < 2$]

36 Data l'ellisse di equazione $2x^2 + 3y^2 = 24$, scrivi quella della retta t ad essa tangente nel suo punto di ascissa 3 e ordinata positiva. Successivamente:
a. calcola il perimetro del triangolo che la retta t individua con gli assi cartesiani
b. scrivi l'equazione dell'iperbole che ha un fuoco nello zero di t e un vertice in $P(0, -3)$.

$$[\mathbf{a.} t : 2x + \sqrt{2}y - 8 = 0; 2p = 4(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1); \mathbf{b.} \frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1]$$

37 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti che è tangente alla retta di equazione $y + x - 4 = 0$ e determina le coordinate del punto T di tangenza. Successivamente, determina l'equazione dell'ellisse che passa per i punti T e $P(-4; 0)$. [$xy = 4; (2, 2); x^2 + 3y^2 = 16$]

38 Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha l'asse maggiore su quello delle ascisse lungo 8 ed eccentricità $e = \frac{1}{2}$. Tra le rette parallele a quella di equazione $y = \frac{1}{2}x$, individua quella che intercetta su tale ellisse una corda AB lunga $3\sqrt{5}$ situata nel semipiano delle ordinate positive. Verificato che il punto A appartiene all'asse x , trova infine l'equazione dell'iperbole che ha un fuoco in A e come asintoto la retta $y = 6x$.

$$[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1; y = \frac{1}{2}x + 2; A(-4, 0), B(2, 3); \frac{37x^2}{16} - \frac{37y^2}{576} = 1]$$

L'iperbole equilatera e la funzione omografica

39 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli assi che passa per il punto $P(3, -2)$. [$x^2 - y^2 = 5$]

40 Determina l'equazione dell'iperbole riferita al centro e agli assi sapendo che è tangente alla retta $x = 3$. [$x^2 - y^2 = 9$]

- 41** Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti sapendo che ha i fuochi nei punti di coordinate $(\pm\sqrt{6}, \mp\sqrt{6})$. [$xy = -3$]
- 42** Dopo aver determinato l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti che passa per il punto $P(2, 1)$, trova la distanza tra i vertici. [4]
- 43** Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti che passa per il punto di coordinate $(2, 3)$; applica poi ad essa la traslazione di vettore $\vec{v} = (1, -1)$ e descrivi le caratteristiche della funzione ottenuta. [$xy = 6; y = \frac{x-7}{1-x}$]
- 44** Data la funzione omografica di equazione $y = \frac{3x-1}{x+2}$, determina gli asintoti e rappresentala in un piano cartesiano. [$x = -2; y = 3$]
- 45** Data la funzione omografica di equazione $y = \frac{x+2}{2x-1}$, determina gli asintoti e rappresentala in un piano cartesiano. [$x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}$]
- 46** Scrivi l'equazione della funzione omografica con centro di simmetria coincidente con il centro della circonferenza $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ e passante per il punto $P(3, -1)$. [$y = \frac{-2x+4}{x-1}$]

Rappresentazione grafica di curve irrazionali e con i moduli

Rappresenta graficamente le curve che hanno le seguenti equazioni e controlla il grafico con GeoGebra o con Wiris.

47 $y = \sqrt{2-x^2}$

48 $y = 9\sqrt{x^2+4}$

49 $y = 2 + \sqrt{4-x^2}$

50 $y = 1 + \sqrt{2-x^2}$

51 $y = 2\sqrt{1-x^2}$

52 $y = 2\sqrt{3-x^2}$

53 $y = -\frac{2}{3}\sqrt{4+x^2}$

54 $x = \sqrt{4-3y}$

55 $y = 1 - \sqrt{16-x^2}$

56 $y = 2 + \sqrt{x}$

57 $y = |2x^2 - 1| - 3$

58 $y = x - 3 + |x^2 - 4|$

59 $x^2 + y^2 + 6|y| - 2 = 0$

60 $x^2 + y^2 + 2|x| - y = 0$

61 $x = |1 - y^2| + 2$

62 $x = |4 - y^2| + 1$

63 $x^2 + y^2 - |3x| + |y| - 1 = 0$

64 $x^2 + y^2 + |x| + 3|y+1| - 3 = 0$

65 $y = |x^2 + 2x - 3|$

66 $y = 3 - |x^2 - 4|$

67 $y = x^2 - |2x - 1|$

68 $y = x + |x^2 - 1|$