

## LE RELAZIONI

### LE RELAZIONI TRA DUE INSIEMI

#### richiami della teoria

- Tra due insiemi  $A$  e  $B$  si stabilisce una **corrispondenza** quando si individua una proprietà che associa agli elementi di  $A$  gli elementi di  $B$ ;
- una **relazione**  $\mathcal{R}$  tra due insiemi  $A$  e  $B$  permette di associare gli elementi appartenenti ad  $A$  con gli elementi appartenenti a  $B$ ;
- le **relazioni** si possono rappresentare **in forma sagittale** mediante una freccia che collega gli elementi di  $A$  con quelli di  $B$  oppure mediante una **tabella a doppia entrata**;
- il **dominio** di una relazione  $\mathcal{R}$  da  $A$  verso  $B$  è il sottoinsieme di  $A$  formato da tutti gli elementi cui è possibile applicare  $\mathcal{R}$ ;
- il **codominio** di una relazione  $\mathcal{R}$  da  $A$  verso  $B$  è il sottoinsieme di  $B$  formato da tutti gli elementi che sono in relazione con un elemento di  $A$ ;
- la **relazione inversa** di una relazione  $\mathcal{R}$  è tale da invertire l'ordine degli elementi che formano le coppie  $(a, b)$ .

#### COMPRENSIONE DELLA TEORIA

- 1 Completa la seguente definizione:  
quando tra due insiemi  $A$  e  $B$  si individua una ..... che permette di associare gli elementi di  $A$  con gli elementi di  $B$  si dice che tra i due insiemi si è stabilita una .....
- 2 Si chiama relazione  $\mathcal{R}$  tra due insiemi  $A$  e  $B$  la proprietà che associa:
  - a. gli elementi appartenenti ad  $A$  con qualche elemento appartenente a  $B$ ;
  - b. gli elementi appartenenti ad  $A$  con gli elementi appartenenti a  $B$ ;
  - c. gli elementi appartenenti a  $B$  con qualche elemento appartenente ad  $A$ .
- 3 Indica in quali modi si può rappresentare una relazione  $\mathcal{R}$  tra due insiemi o tra gli elementi dello stesso insieme.
- 4 Considera gli insiemi  $A = \{\text{vino; birra; pane}\}$  e  $B = \{\text{farina; uva; sale; aceto}\}$  e la relazione  $\mathcal{R}$  da  $A$  verso  $B$  individuata dalla frase: «... si prepara con ...». Indica qual è il sottoinsieme che rappresenta il dominio e quale sottoinsieme rappresenta il codominio.
- 5 Quando in una relazione  $\mathcal{R}$  si inverte l'ordine degli elementi che formano le coppie  $(a, b)$  la relazione si chiama:
  - a. inversa e si indica con  $\frac{1}{\mathcal{R}}$ ;
  - b. opposta e si indica con  $-\mathcal{R}$ ;
  - c. esponenziale e si indica con  $\mathcal{R}^2$ .

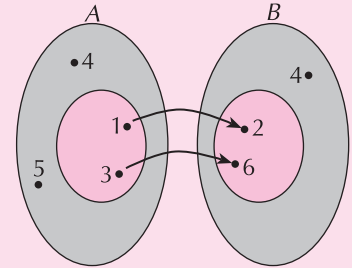
## APPLICAZIONE

6 *Esercizio Svolto*

Siano dati gli insiemi  $A = \{1; 3; 4; 5\}$  e  $B = \{2; 4; 6\}$ . Determina il grafico della relazione  $\mathcal{R}$  da  $A$  verso  $B$  collegando ogni numero con il suo doppio. Quali sono il dominio e il codominio della relazione?

Il grafo della relazione  $\mathcal{R}$  è rappresentato a lato. In esso abbiamo colorato con tonalità diverse il dominio e il codominio; in particolare:

- il dominio è rappresentato dagli elementi di  $A$  da cui parte almeno una freccia: 1; 3
- il codominio è rappresentato dagli elementi di  $B$  cui arriva almeno una freccia: 2; 6.



7 Dati gli insiemi  $A = \{\text{Mantova; Milano; Asti; Catania; Napoli; Bari; Roma}\}$  e  $B = \{\text{Sardegna; Umbria; Piemonte; Puglia; Lazio; Sicilia; Lombardia}\}$ . Determina il grafico della relazione  $\mathcal{R}$  da  $A$  verso  $B$  collegando ogni città con la regione di appartenenza. Quali sono il dominio e il codominio della relazione?

8 Sia dato l'insieme  $A = \{2; 4; 6; 8\}$ , descrivi per elencazione l'insieme  $B$  in modo che tra i due insiemi si stabilisca una relazione  $\mathcal{R}$  espressa dalla frase: «... è il risultato della divisione per 3 di ...» e in modo che  $A$  non coincida col dominio. Rappresenta inoltre con un grafico sagittale la relazione ottenuta.

9 Sia dato l'insieme  $A = \{9; 13; 3\}$  descrivi per elencazione l'insieme  $B$  formato da numeri dispari in modo che tra i due insiemi si stabilisca una relazione  $\mathcal{R}$  espressa dalla frase: «... è il numero dispari consecutivo di ...». Rappresenta inoltre con un grafico sagittale la relazione ottenuta.

10 Dati gli insiemi  $A = \{\text{miele; frutto; uovo}\}$  e  $B = \{\text{gallina; api; albero; balena}\}$  e la relazione  $\mathcal{R}$  definita dalla frase: «... è prodotto da ...», rappresenta il grafico della relazione e individua il dominio e il codominio della relazione stessa.

## LE RELAZIONI IN UN INSIEME E LE PROPRIETÀ

### richiami della teoria

- Si chiama **relazione**  $\mathcal{R}$  **in un insieme**  $A$  la proprietà che associa gli elementi di  $A$  con gli elementi di  $A$  stesso;
- la rappresentazione di una relazione  $\mathcal{R}$  in un insieme  $A$  si può effettuare mediante una **tabella a doppia entrata** o tramite la **forma sagittale**;
- una relazione  $\mathcal{R}$  in un insieme  $A$  si dice **riflessiva** quando ogni elemento  $x$  appartenente ad  $A$  è in relazione con se stesso;
- una relazione  $\mathcal{R}$  in un insieme  $A$  si dice **antiriflessiva** quando nessun elemento  $x$  appartenente ad  $A$  è in relazione con se stesso;
- una relazione  $\mathcal{R}$  in un insieme  $A$  si dice **simmetrica** quando considerati due elementi  $x$  e  $y$  appartenenti ad  $A$  ogni volta che  $x$  è in relazione con  $y$ , allora  $y$  è in relazione con  $x$ ;
- una relazione  $\mathcal{R}$  in un insieme  $A$  si dice **transitiva** quando considerati tre elementi  $x$ ,  $y$  e  $z$  appartenenti ad  $A$ , ogni volta che  $x$  è in relazione con  $y$  e  $y$  è in relazione con  $z$ , anche  $x$  è in relazione con  $z$ ;
- una relazione  $\mathcal{R}$  in un insieme  $A$  si dice **antisimmetrica** quando, considerati due elementi qualunque  $x$  e  $y$  appartenenti ad  $A$ , possono sussistere contemporaneamente  $x \mathcal{R} y$  e  $y \mathcal{R} x$  solo se  $x = y$  oppure, detto in altri termini, quando dati due elementi qualunque  $x$  e  $y$  appartenenti all'insieme  $A$  con  $x \neq y$ , se  $x$  è in relazione con  $y$  non succede che  $y$  è in relazione con  $x$ .

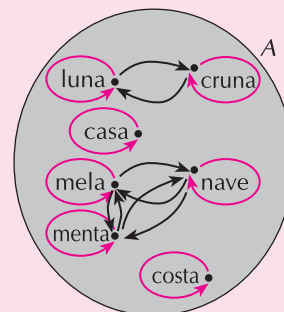
### APPLICAZIONE

#### 11 *Esercizio Svolto*

Sia dato l'insieme  $A = \{\text{luna; casa; cruna; mela; nave; menta; costa}\}$ . Considera la relazione  $\mathcal{R}$  in  $A$  espressa dalla frase «... ha le stesse vocali di ...». Rappresenta la relazione  $\mathcal{R}$  in  $A$  mediante un grafo e indica le proprietà di cui gode la relazione stessa.

Dal grafo della nostra relazione  $\mathcal{R}$  deduciamo che:

- a. la relazione gode della proprietà riflessiva in quanto ogni parola è in relazione con se stessa;
- b. la relazione gode della proprietà simmetrica in quanto se una parola ha le stesse vocali di un'altra, anche quest'ultima ha le stesse vocali della prima;
- c. la relazione gode della proprietà transitiva in quanto se una prima parola ha le stesse vocali di una seconda parola e quest'ultima ha le stesse vocali di una terza parola, allora la prima parola ha le stesse vocali dell'ultima.



- 12 Dato l'insieme  $A$  di tutti i cognomi degli alunni presenti nella tua scuola e la relazione  $\mathcal{R}$  in  $A$  espressa dalla frase «... ha lo stesso cognome di ...»; di quali proprietà gode la relazione stessa?

#### 13 *Esercizio Guidato*

Sia dato l'insieme  $A$  formato dagli alunni della tua classe. Stabilisci di quali proprietà godono le relazioni:

- a.  $\mathcal{R}_1$  definita dalla frase: «..... ha la media dei voti raggiunti nel primo quadrimestre più alta di .....»;
- b.  $\mathcal{R}_2$  definita dalla frase: «..... ha la stessa altezza di .....».

- a. la relazione  $\mathcal{R}_1$  gode della proprietà antiriflessiva in quanto .....; la relazione gode della proprietà transitiva in quanto se media (a) .... media (b) e ....., ..... anche media (a) .....;
- la relazione gode della proprietà ..... in quanto per ogni  $a \neq b$  se media (a) > media (b) non può accadere che media (b) .....
- b. la relazione  $\mathcal{R}_2$  gode della proprietà riflessiva in quanto ogni .....; la relazione gode della proprietà simmetrica in quanto se ....., anche .....;
- la relazione gode della proprietà ..... in quanto se ..... e ..... anche .....

**14** Stabilisci di quale proprietà gode la relazione  $\mathcal{R}$  espressa dalla frase: «... x è il doppio di y ...» nell'insieme dei numeri razionali assoluti.

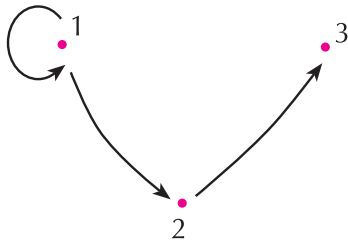
**15** Considera il seguente insieme  $A = \{1; 2; 3; 4\}$  e la relazione  $\mathcal{R}$  in  $A$  rappresentata dalla seguente tabella a doppia entrata:

$\mathcal{R}$	1	2	3	4
1	X			
2		X	X	
3		X	X	
4				X

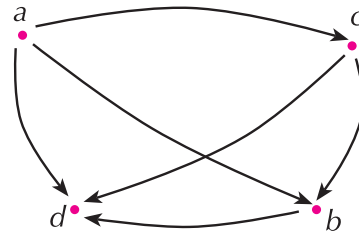
Stabilisci di quali proprietà gode la relazione  $\mathcal{R}$  in  $A$ .

**Osserva il grafo delle seguenti relazioni e individua le proprietà.**

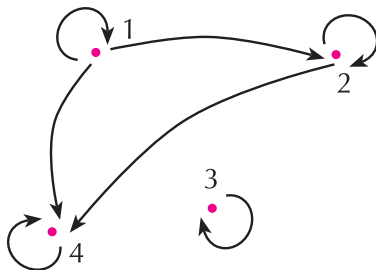
**16**



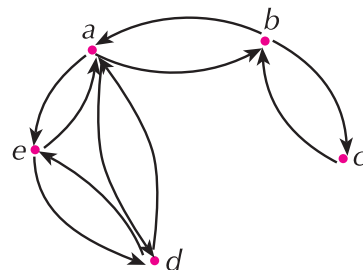
**17**



**18**



**19**



*Deduci le proprietà delle relazioni rappresentate dalle seguenti tabelle.*

**20**

	1	2	3	4
1	X	X	X	X
2	X	X	X	
3	X	X	X	X
4	X		X	X

**21**

	1	2	3	4
1		X	X	X
2		X		X
3			X	
4			X	

**22**

	1	2	3	4	5
1		X	X	X	X
2	X		X	X	X
3		X			
4			X		
5	X		X	X	

**23**

	1	2	3	4	5
1	X	X		X	
2	X			X	
3			X		X
4	X	X		X	
5			X		

## RELAZIONI DI EQUIVALENZA E DI ORDINE

### richiami della teoria

- Una relazione è di **equivalenza** quando gode delle proprietà **riflessiva**, **simmetrica** e **transitiva**;
- una relazione è di **ordine** quando gode delle proprietà **transitiva** e **antisimmetrica**;
- le relazioni d'ordine si dividono in:
  - **ordine largo** se  $\mathcal{R}$  gode anche della proprietà **riflessiva**;
  - **ordine stretto** se  $\mathcal{R}$  gode anche della proprietà **antiriflessiva**;
- una relazione è di **ordine totale** o **parziale** a seconda che tutte (o non tutte) le coppie degli elementi di un insieme si possono confrontare tra loro tramite la relazione  $\mathcal{R}$ .

### COMPRESIONE DELLA TEORIA

- 24** Una relazione  $\mathcal{R}$  in un insieme  $A$  si dice riflessiva quando:
- a. per ogni elemento  $x$  appartenente ad  $A$  esiste un elemento  $y$  appartenente ad  $A$  tale che  $x$  è in relazione con  $y$ ;
  - b. ogni elemento  $x$  appartenente ad  $A$  è in relazione con se stesso;
  - c. esistono elementi  $x$  appartenenti ad  $A$  tali che  $x$  non è in relazione con se stesso.

- 25** Completa le seguenti definizioni:
- a. una relazione  $\mathcal{R}$  in un insieme  $A$  si dice ..... se nessun elemento  $x$  di  $A$  è in relazione con se stesso;
  - b. una relazione  $\mathcal{R}$  in un insieme  $A$  si dice simmetrica quando considerati due elementi  $x$  e  $y$  appartenenti ad  $A$  ogni volta che  $x$  è ....., allora anche  $y$  è .....
  - c. una relazione  $\mathcal{R}$  definita in un insieme  $A$  si dice transitiva se:  $\forall x, y, z \in \dots$  se  $x \mathcal{R} \dots$  e  $y \mathcal{R} \dots \Rightarrow \dots \mathcal{R} z$ .

- 26** Che tipo di relazione rappresenta la seguente scrittura simbolica?  
 $\forall x, y \in A$  se  $x \mathcal{R} y$  e  $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$ .

- 27** Una relazione  $\mathcal{R}$  si dice di equivalenza se gode contemporaneamente delle proprietà:
- a. riflessiva, simmetrica;
  - b. antiriflessiva, simmetrica;
  - c. riflessiva, simmetrica, transitiva;
  - d. simmetrica, transitiva;
  - e. transitiva, antisimmetrica.

- 28** Sia dato l'insieme  $A = \{\text{casa; ala; nave; neo; vino; algebra; caserma}\}$  e la relazione  $\mathcal{R}$  espressa dalla frase: «... ha lo stesso numero di lettere di ...». Dopo aver verificato che si tratta di una relazione di ..... indica quali delle seguenti scritture sono vere e quali sono false:

- a.  $\forall x, y, z \in A$  se  $x \mathcal{R} y$  e  $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$
- b.  $\forall x, y \in A$  se  $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- c.  $\forall x \in A, x \mathcal{R} x$
- d.  $\forall x, y \in A$  se  $x \mathcal{R} y$  e  $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$



- 29** Sia dato l'insieme  $A = \{4; 9; 250; 3700\}$  e la relazione  $\mathcal{R}$  espressa dalla frase: «... ha un numero di cifre minore di ...». Dopo aver verificato che si tratta di una relazione di ..... indica quali delle seguenti scritture sono vere e quali sono false:

- a.  $\forall x, y, z \in A$  se  $x \mathcal{R} y$  e  $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$
- b.  $\forall x, y \in A$  se  $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- c.  $\forall x \in A, x \mathcal{R} x$
- d.  $\forall x, y \in A$  se  $x \mathcal{R} y$  e  $y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- 30** Completa le seguenti definizioni:
- a. una relazione  $\mathcal{R}$  definita in un insieme  $A$  si dice relazione d'ordine quando gode contemporaneamente delle proprietà .....
  - b. una relazione d'ordine si dice d'ordine largo se gode anche della ....., si dice d'ordine stretto se gode anche della .....

**APPLICAZIONE**

**31** *Esercizio Svolto*

Dato l'insieme  $A = \{\text{cane; casa; albero; foglio; abete; colore; sale}\}$  indica le proprietà di cui gode la relazione  $\mathcal{R}$  definita dalla frase «... ha lo stesso numero di lettere di ...» e stabilisci se si tratta di relazione d'ordine o di equivalenza.

La relazione  $\mathcal{R}$  gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Infatti ogni parola ha lo stesso numero di lettere di se stessa; se una parola ha lo stesso numero di lettere di un'altra, allora quest'ultima ha lo stesso numero di lettere della prima; se una parola ha lo stesso numero di lettere di una seconda parola e questa ha lo stesso numero di lettere di una terza parola, allora la prima ha lo stesso numero di lettere della terza.

Possiamo quindi concludere che la relazione è di equivalenza.

- 32** Dato l'insieme  $A = \{\text{candela; abete; giostra; libro; zoccolo; rosa}\}$  e la relazione  $\mathcal{R}$  espressa dalla frase: «... inizia con una lettera che nell'ordine dell'alfabeto italiano si trova prima di ...»; di che tipo di relazione si tratta?
- 33** Sia dato l'insieme  $A = \{x/x \text{ è un abitante della Lombardia}\}$  e la relazione  $\mathcal{R}$  espressa dalla frase: «... abita nella stessa provincia di ...»; di che tipo di relazione si tratta?
- 34** Considera l'insieme delle persone della tua famiglia e la relazione  $\mathcal{R}$  espressa dalla frase: «... è parente di ...». In generale si può dire che la relazione è di ordine? Perché?
- 35** Considera l'insieme degli alunni della tua classe e la relazione  $\mathcal{R}$  espressa dalla frase: «... è nato nello stesso mese di ...»; di che tipo di relazione si tratta?
- 36** Considera l'insieme delle 10 squadre di calcio giovanile che partecipano ad un torneo e, in riferimento alla classifica finale, considera la relazione  $\mathcal{R}$  definita dalla frase: «... segue in classifica ...». Di quali proprietà gode la relazione  $\mathcal{R}$ ? Che tipo di relazione è?
- 37** Osserva le tabelle che seguono. Determina quali fra di esse sono relazioni d'ordine, specificandone il tipo.

**a.**

	1	2	3	4	5
1	X	X		X	X
2		X			X
3	X	X	X		X
4			X	X	
5				X	X

**b.**

	1	2	3	4
1	X	X	X	X
2		X	X	X
3			X	X
4				X

**c.**

	1	2	3	4	5
1				X	
2	X			X	X
3					
4					
5				X	

**Stabilisci quali fra le seguenti sono relazioni di equivalenza e quali di ordine largo o stretto.**

- 38** Nell'insieme degli alunni della tua classe la relazione  $\mathcal{R}_1$  espressa dalla frase: «... abita nella stessa via di ...».
- 39** In un insieme di persone la relazione  $\mathcal{R}_2$  espressa dalla frase: «... ha la stessa taglia di ...».
- 40** Nell'insieme  $N$  dei numeri naturali la relazione  $\mathcal{R}_3$  espressa dalla frase: «... è multiplo di ...».
- 41** Nell'insieme  $N$  dei numeri naturali la relazione  $\mathcal{R}_4$  espressa dalla frase: «... è divisore di ...».
- 42** Nell'insieme dei punti di una retta orientata la relazione  $\mathcal{R}_5$  espressa dalla frase: «... segue ...».

**Stabilisci quali fra le seguenti relazioni sono di equivalenza e quali di ordine largo o stretto e, fra queste individua quelle che inducono un ordinamento totale o parziale.**

- 43** Nell'insieme degli alunni della tua classe la relazione  $\mathcal{R}_1$  definita dalla frase: «... ha lo stesso numero di scarpe di ...».
- 44** Nell'insieme degli operai di una fabbrica la relazione  $\mathcal{R}_2$  definita dalla frase: «... abita più distante dalla fabbrica di ...».
- 45** In un insieme di persone la relazione  $\mathcal{R}_3$  definita dalla frase: «... ha un'età superiore o uguale a ...».