

LA GEOMETRIA DEI SOLIDI

PREREQUISITI

- conoscere gli enti fondamentali della geometria piana e le loro proprietà
- possedere il concetto di parallelismo e perpendicolarità
- operare con le misure angolari

CONOSCENZE

1. le tre dimensioni
2. l'angolo diedro
3. l'angoloide

ABILITÀ

- A. rappresentare rette e piani nello spazio ed operare con essi
- B. disegnare i diversi tipi di diedro ed operare con essi
- C. disegnare gli angoloide ed operare con essi

PER RICORDARE

Le tre dimensioni:

1. la **geometria dello spazio** o **geometria dei solidi** è il settore della geometria che si occupa di corpi a tre dimensioni;
2. una **retta è perpendicolare ad un piano** se lo interseca in un punto e se è perpendicolare ad ogni retta del piano passante per quel punto;
3. la **distanza di un punto da un piano** è la lunghezza del segmento perpendicolare condotto da quel punto al piano.

I piani nello spazio:

4. il **diedro** è ciascuna delle due parti in cui lo spazio rimane diviso da due semipiani aventi la stessa origine;
5. la **sezione normale di un diedro** è l'angolo che si ottiene sezionando il diedro con un piano perpendicolare al suo spigolo;
6. la **misura di un angolo diedro** è data dall'ampiezza della sua sezione normale;
7. **due diedri consecutivi** hanno uno spigolo e una faccia in comune;
8. **due diedri adiacenti** sono anche consecutivi e hanno le due facce non comuni in semipiani opposti;
9. il **semipiano bisettore** è il semipiano che uscendo dallo spigolo del diedro lo divide in due diedri congruenti;
10. **due piani perpendicolari** si intersecano formando quattro diedri congruenti;
11. l'**angoloide** è la parte di spazio determinata da tre o più angoli aventi il vertice in comune e tutti a due a due consecutivi;
12. la **somma degli angoli di vertice** delle facce di un angoloide è sempre minore di un angolo giro.

ESERCIZI DI CONOSCENZA

- 1 Completa la seguente definizione:
la geometria dello spazio o geometria dei solidi o ancora geometria solida è il settore della geometria che si occupa dei corpi a

2 Gli elementi fondamentali della geometria solida sono

3 Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

- a. per un punto passa un solo piano;
- b. per una retta passano infiniti piani;
- c. per un punto passano infiniti piani;
- d. per una retta passa un solo piano.

V	F
V	F
V	F
V	F

4 Completa le seguenti definizioni:

- a. due rette appartenenti allo stesso piano si dicono
- b. due rette non appartenenti allo stesso piano si dicono
- c. una retta è perpendicolare ad un piano se lo interseca in un e se è ad ogni retta del piano passante per quel punto; il punto di intersezione è detto della perpendicolare.

5 La distanza di un punto da un piano è:

- a. la lunghezza di un segmento condotto da quel punto al piano;
- b. la lunghezza del segmento perpendicolare condotto da quel punto al piano;
- c. la lunghezza della retta perpendicolare condotta da quel punto al piano.

6 Due piani nello spazio possono essere:

- a. incidenti se hanno una in comune;
- b. se non hanno alcun punto in comune;
- c. coincidenti se hanno i loro punti in comune.

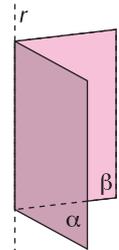
7 Completa la seguente definizione:

il diedro è ciascuna delle in cui rimane diviso da aventi; i due semipiani sono detti del diedro, la retta origine si dice o costa.

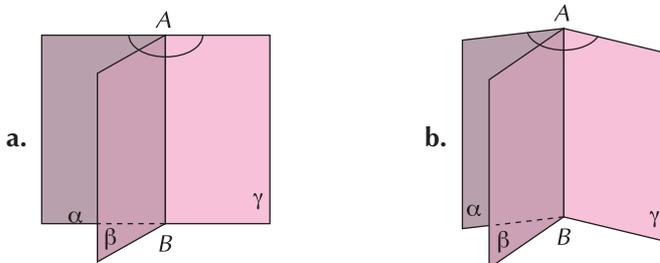
8 Indica nella figura a lato con un archetto l'angolo diedro convesso e quello concavo.

9 Completa le seguenti definizioni:

- a. la sezione normale di un diedro è l'angolo che si ottiene il diedro con un piano al suo spigolo;
- b. un diedro si dice acuto, retto o ottuso se la sua corrisponde rispettivamente ad



10 Indica quali dei seguenti diedri sono consecutivi e quali adiacenti.



11 Completa le seguenti definizioni:

- a. un semipiano si dice bisettore quando, uscendo dallo del diedro, lo divide in congruenti;
- b. l'angoloide è la parte di spazio determinata da o più aventi in comune e tutti a due a due

- 12 La somma degli angoli al vertice delle facce di un angoloide è:
- uguale ad un angolo giro;
 - sempre maggiore di un angolo giro;
 - sempre minore di un angolo giro.

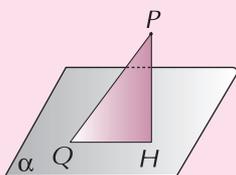
ESERCIZI DI ABILITÀ ⇒ LIVELLO BASE *

1 *Esercizio Svolto*

La distanza di un punto da un piano

Calcola la distanza del punto P dal piano α sapendo che $\overline{PQ} = 205$ cm e $\overline{QH} = 123$ cm.

Svolgimento



Dati	Incognita
$\overline{PQ} = 205$ cm	\overline{PH}
$\overline{QH} = 123$ cm	
$PH \perp \alpha$	

Applichiamo il teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo PQH sapendo che il cateto PH corrisponde alla distanza del punto P dal piano α :

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{QH}^2} = \sqrt{205^2 - 123^2} \text{ cm} = \sqrt{42025 - 15129} \text{ cm} = \sqrt{26896} \text{ cm} = 164 \text{ cm}$$

Utilizzando la figura dell'esercizio svolto precedente risolvi i seguenti problemi.

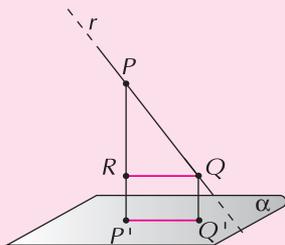
- Calcola la misura del segmento PH sapendo che: $\overline{PQ} = 95$ cm; $\overline{QH} = 57$ cm; $PH \perp \alpha$.
- Calcola la misura del segmento QH sapendo che: $\overline{PQ} = 155$ cm; $\overline{PH} = 124$ cm; $PH \perp \alpha$.
- Calcola la misura del segmento QP sapendo che: $\overline{PH} = 208$ cm; $\overline{QP} = 156$ cm; $PH \perp \alpha$.

5 *Esercizio Svolto*

La proiezione di un segmento su un piano

I punti P e Q di una retta r incidente con un piano α distano dallo stesso piano rispettivamente 46 cm e 18 cm; sapendo che la loro distanza misura 35 cm, calcola la lunghezza della proiezione $P'Q'$ del segmento PQ sul piano α .

Svolgimento



Dati	Incognita
$\overline{PP'} = 46$ cm	$\overline{P'Q'}$
$\overline{QQ'} = 18$ cm	
$\overline{PQ} = 35$ cm	

Dal punto Q tracciamo una parallela al segmento $P'Q'$; questa intersecherà il segmento PP' in un punto R . Il triangolo PRQ è rettangolo in R , pertanto:

$$\overline{PR} = \overline{PP'} - \overline{QQ'} = (46 - 18) \text{ cm} = 28 \text{ cm}$$

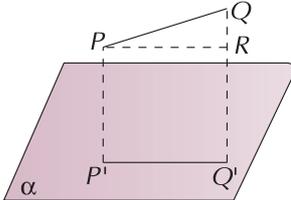
Applicando il teorema di Pitagora, otteniamo:

$$\overline{RQ} = \sqrt{\overline{PQ^2} - \overline{PR^2}} = \sqrt{35^2 - 28^2} \text{ cm} = \sqrt{1225 - 784} \text{ cm} = \sqrt{441} \text{ cm} = 21 \text{ cm.}$$

Essendo $\overline{P'Q'} = \overline{RQ}$ tale valore rappresenta la proiezione di PQ sul piano α .

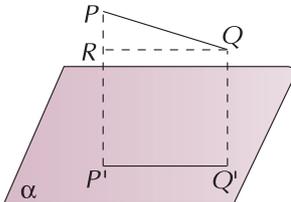
Osserva le seguenti figure e, utilizzando i dati della tabella a lato, calcola i valori incogniti.

6



Dati	Incognita
$\overline{PQ} = 95 \text{ cm}$	$\overline{P'Q'}$
$\overline{PP'} = 123 \text{ cm}$	
$\overline{QQ'} = 180 \text{ cm}$	

7



Dati	Incognita
$\overline{PQ} = 145 \text{ cm}$	$\overline{P'Q'}$
$\overline{PP'} = 123 \text{ cm}$	
$\overline{QQ'} = 106 \text{ cm}$	

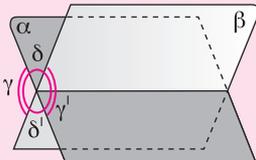
8

Esercizio Svolto

Gli angoli diedri

Due piani α e β intersecandosi formano un diedro γ di ampiezza 150° ; calcola la misura di ognuno degli altri tre diedri che si vengono a formare.

Svolgimento



Dato	Incognita
$\gamma = 150^\circ$	γ', δ, δ'

Osservando la figura notiamo che: $\gamma' = \gamma = 150^\circ$ in quanto diedri opposti allo spigolo.

$$\delta = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ;$$

$\delta' = \delta = 30^\circ$ perché diedri opposti allo spigolo.

9

Due piani α e β intersecandosi formano un diedro γ di ampiezza 125° ; calcola la misura di ognuno degli altri tre diedri che si vengono a formare.

10

Un diedro è ampio 55° ; calcola l'ampiezza del suo complementare.

11

Un diedro è ampio 106° ; calcola l'ampiezza del suo supplementare.

12

Due diedri adiacenti sono uno il doppio dell'altro. Calcola l'ampiezza di ciascun diedro.

13

La somma delle ampiezze di due diedri consecutivi è 160° e il primo diedro è il triplo del secondo; calcola la misura dei due diedri.

14

Indica con quali delle seguenti terne di angoli è possibile formare un angoloide:

a. $130^\circ; 75^\circ; 121^\circ; 35^\circ$;

b. $100^\circ; 145^\circ; 59^\circ; 50^\circ$;

c. $77^\circ; 88^\circ; 99^\circ; 100^\circ$.

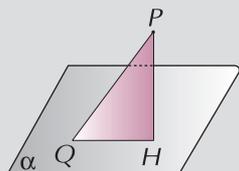
ESERCIZI DI ABILITÀ ⇒ LIVELLO MEDIO **

1 *Esercizio Guidato*

La distanza di un punto da un piano

Calcola la distanza di un punto P dal piano α sapendo che $\overline{PQ} + \overline{QH} = 148$ cm e $\overline{PQ} - \overline{QH} = 37$ cm.

Svolgimento



Dati	Incognita
$\overline{PQ} + \overline{QH} = 148$ cm	\overline{PH}
$\overline{PQ} - \overline{QH} = 37$ cm	

Determiniamo la misura di PQ e QH :

$$\overline{QH} = \left[(\overline{PQ} + \overline{QH}) - (\overline{PQ} - \overline{QH}) : 2 \right] = [(148 - 37) : 2] \text{ cm} = \dots \text{ cm}$$

$$\overline{PQ} = \dots + (\overline{PQ} - \overline{QH}) = (55,5 + \dots) \text{ cm} = 92,5 \text{ cm}$$

Applichiamo il teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo per calcolare la misura del segmento PH :

$$\overline{PH} = \sqrt{\dots - \dots} = \sqrt{92,5^2 - \dots} \text{ cm} = \sqrt{\dots - 3080,25} \text{ cm} = \sqrt{\dots} \text{ cm} = 74 \text{ cm}.$$

- 2 In riferimento alla figura dell'esercizio precedente, calcola la distanza del punto P dal piano α sapendo che $\overline{PQ} + \overline{QH} = 232$ cm e $\overline{PQ} - \overline{QH} = 58$ cm.

- 3 Una retta r è perpendicolare ad un piano α in un punto H . Determina l'ampiezza dell'angolo \widehat{PQH} con il punto Q appartenente al piano α , nei seguenti casi:

- $PH = QH$;
- $PQ = 2 \cdot QH$;
- $PQ = 2 \cdot PH$.

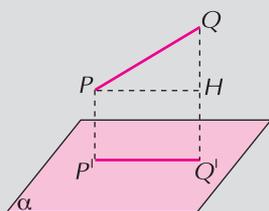
- 4 Da un punto P , non appartenente al piano α , traccia due segmenti congruenti che intersecano il piano α nei punti A e B allineati con il piede H della perpendicolare condotta da P su α . Sapendo che i segmenti PA e PB sono lunghi ciascuno 25 cm, e che il perimetro del triangolo PAB è 90 cm, calcola la distanza del punto P dal piano α .

5 *Esercizio Guidato*

La proiezione di un segmento su un piano

Il segmento PQ è lungo 112,5 cm; calcola la misura della sua proiezione sul piano α sapendo che $\overline{QQ'} = 100$ cm e $\overline{HQ'} = 32,5$ cm.

Svolgimento



Dati	Incognita
$\overline{PQ} = 112,5$ cm	$\overline{P'Q'}$
$\overline{QQ'} = 100$ cm	
$\overline{HQ'} = 32,5$ cm	

Calcoliamo la lunghezza del segmento QH : $\overline{QH} = \overline{QQ'} - \overline{HQ'} = (100 - 32,5) \text{ cm} = 67,5 \text{ cm}.$

Determiniamo la misura di PH applicando il teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo

$$\overline{PH} = \sqrt{PQ^2 - \dots\dots} = \sqrt{112,5^2 - 67,5^2} \text{ cm} = \sqrt{\dots\dots\dots} - 4556,25 \text{ cm} = \sqrt{\dots\dots} \text{ cm} = 90 \text{ cm}$$

Come è facile capire $PH = \dots\dots\dots$ pertanto: $\overline{P'Q'} = \dots\dots \text{ cm}$.

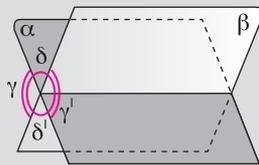
- 6** Utilizzando la figura dell'esercizio precedente calcola la misura del segmento PQ e della sua proiezione sul piano α sapendo che $\overline{QQ'} = 50 \text{ cm}$; $\overline{PP'} = 20 \text{ cm}$; $\widehat{QPH} = 45^\circ$.

7 *Esercizio Guidato*

Gli angoli diedri

Due piani α e β intersecandosi formano un diedro δ di ampiezza $35^\circ 25' 30''$. Calcola la misura degli altri tre diedri che si vengono a formare.

Svolgimento



Dato	Incognita
$\delta = 35^\circ 25' 30''$	γ', γ, δ'

Osservando attentamente la figura notiamo che gli angoli diedri sono a due a due perché opposti allo; pertanto: $\delta' = \delta = 35^\circ 25' 30''$;

$$\gamma = \gamma' = 180^\circ - \dots\dots = 180^\circ - 35^\circ 25' 30'' = 179^\circ \dots\dots\dots - 35^\circ 25' 30'' = 144^\circ 34' 30''.$$

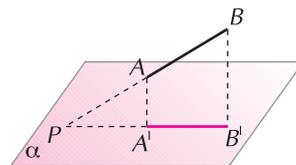
- 8** Calcola l'ampiezza di due diedri adiacenti sapendo che il doppio del minore supera di 18° il maggiore.
- 9** Due diedri sono uno $\frac{3}{4}$ dell'altro e la loro somma è ampia $91^\circ 42'$; calcola la misura di ognuno di essi.
- 10** Calcola l'ampiezza di due diedri adiacenti sapendo che la sezione normale di uno di essi è $\frac{5}{3}$ della sezione normale dell'altro.
- 11** La differenza di due diedri supplementari misura $55^\circ 44'$. Calcola le ampiezze dei due diedri.
- 12** E' possibile costruire un angoloide di 4 facce sapendo che l'angolo al vertice della prima faccia misura 25° ed è la metà del secondo, il secondo è la metà del terzo e il terzo è la metà del quarto?

ESERCIZI DI ABILITÀ \Rightarrow LIVELLO AVANZATO ***

- 1** Considera due rette sghembe r ed s individuate dai segmenti AB e CD ; traccia per il punto B la parallela t , individuata dal segmento BE , alla retta CD . Com'è il piano individuato dalle due rette incidenti rispetto alla retta s ?
- 2** Una retta r è parallela ad un piano α ; come deve essere una retta di α perché esista un piano passante per questa retta e per r ? Quanti possono essere questi piani?
- 3** Se una retta r è perpendicolare ad un piano α , due piani β e γ , contenenti la retta r , come risultano rispetto al piano α ?
- 4** Considera una retta r perpendicolare ad un piano α in un generico punto H . Siano P e Q due generici

punti appartenenti rispettivamente alla retta r e al piano α . Di che natura è il triangolo PQH ? Spiega il motivo della tua scelta.

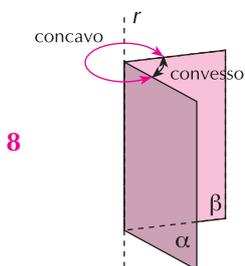
- 5** Se una retta r è perpendicolare ad un piano α in un punto H e P è un generico punto di α , qual è la posizione reciproca tra la retta r e la retta passante per PH ? Qual è invece la posizione reciproca tra la retta r e una generica retta del piano α passante per P ma non per H ?
- 6** Dopo aver disegnato due piani paralleli α e β , traccia in β una circonferenza di centro O e inscrivi in essa un quadrato $ABCD$. Proietta sul piano α il punto d'intersezione delle due diagonali del quadrato e chiama P questo punto. Sapendo che i segmenti PO e PD sono uno $\frac{4}{5}$ dell'altro e la somma delle loro misure è 135 cm, calcola il perimetro e l'area del quadrato. (Suggerimento: per il calcolo dell'area usa la formula $A = d^2 : 2$)
- 7** Calcola la misura della proiezione del segmento AB su α sapendo che $\overline{BB'} = 42$ cm; $\overline{PB} = 70$ cm e $\overline{AA'} = 24$ cm.
- 8** Disegna su un piano α un rombo $ABCD$ avente le diagonali AC e BD lunghe rispettivamente 18 cm e 32 cm. Dopo aver tracciato la retta perpendicolare al piano α passante per il punto d'intersezione H delle due diagonali, prendi un punto P tale che la sua distanza dal piano sia 12 cm. Calcola la distanza di P dai quattro vertici del rombo.
- 9** Tre diedri consecutivi formano un angolo di 288° . Calcola l'ampiezza dei tre diedri sapendo che il primo è $\frac{3}{5}$ del secondo e che quest'ultimo è $\frac{5}{4}$ del terzo diedro.
- 10** Tre semipiani aventi l'origine in comune formano tre angoli diedri. Calcola l'ampiezza di ciascun angolo diedro sapendo che le rispettive misure sono proporzionali ai numeri 4, 5 e 3.
- 11** Disegna un angoloide di vertice V a cinque facce e sezionalo con due piani α e β tra loro paralleli.
- 12** Può esistere un angoloide formato da tre facce uguali ampie ciascuna $80^\circ 40'$ e da altre due facce tra loro uguali ampie ciascuna $57^\circ 30'$?



SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI CONOSCENZA

- 1** tre dimensioni. **2** il punto, la retta, il piano.
- 3** a. F; b. V; c. V; d. F.
- 4** a. complanari; b. sghembe; c. punto, perpendicolare, piede. **5** b.
- 6** a. retta; b. paralleli; c. tutti.
- 7** due parti, lo spazio, due semipiani, la stessa origine, facce, spigolo.



- 9 a. sezionando, perpendicolare; b. sezione normale, un angolo acuto, retto o ottuso.
 10 a. adiacenti; b. consecutivi.
 11 a. spigolo, due diedri; b. tre, angoli, il vertice, consecutivi. 12 c.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO BASE

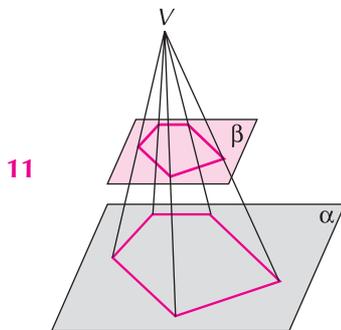
- 2 76 cm. 3 93 cm. 4 260 cm.
 6 76 cm. 7 144 cm. 9 125°; 55°; 55°.
 10 35°. 11 74°. 12 60°; 120°.
 13 40°; 120°. 14 b.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO MEDIO

- 1 $\overline{QH} = [(\overline{PQ} + \overline{QH}) - (\overline{PQ} - \overline{QH}) : 2] = [(148 - 37) : 2] \text{ cm} = 55,5 \text{ cm};$
 $\overline{PQ} = \overline{QH} + (\overline{PQ} - \overline{QH}) = (55,5 + 37) \text{ cm} = 92,5 \text{ cm}; \overline{QHP};$
 $\overline{PH} = \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{QH}^2} = \sqrt{92,5^2 - 55,5^2} \text{ cm} = \sqrt{8556,25 - 3080,25} \text{ cm} = \sqrt{5476} \text{ cm} = 74 \text{ cm}.$
- 2 116 cm. 3 a. 45°; b. 60°; c. 30°. 4 15 cm.
- 5 $\overline{QPH}; \overline{PH} = \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{QH}^2} = \sqrt{112,5^2 - 67,5^2} \text{ cm} = \sqrt{12656,25 - 4556,25} \text{ cm} = \sqrt{8100} \text{ cm} = 90 \text{ cm};$
 $\overline{PH} = \overline{P'Q'}; \overline{P'Q'} = 90 \text{ cm}.$
- 6 42,42 cm; 30 cm.
 7 congruenti; spigolo; $\gamma = \gamma' = 180^\circ - \delta = 180^\circ - 35^\circ 25' 30'' = 179^\circ 59' 60'' - 35^\circ 25' 30'' = 144^\circ 34' 30''.$
 8 114°; 66°. 9 39° 18'; 52° 24'. 10 112° 30'; 67° 30'.
 11 62° 8'; 117° 52'. 12 no perché la somma degli angoli di vertice non è minore di 360°.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO AVANZATO

- 1 parallelo. 2 parallela a r ; uno. 3 perpendicolari.
 4 triangolo rettangolo. 5 le rette sono perpendicolari; le rette sono sghembe.
 6 254,5584 cm; 4050 cm². 7 24 cm. 8 $\overline{PA} = \overline{PC} = 15 \text{ cm}; \overline{PB} = \overline{PD} = 20 \text{ cm}.$
 9 72°; 120°; 96°. 10 120°; 150°; 90°.



12 si.