APPROFONDIMENTO

I fasci di circonferenze

Se combiniamo linearmente le equazioni di due circonferenze otteniamo un fascio di circonferenze. Per esempio, date le circonferenze di equazioni

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 2y - 16 = 0$$

la loro combinazione lineare dà luogo all'equazione

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + k(x^2 + y^2 - 2y - 16) = 0$$

che possiamo riscrivere in questo modo

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 + 4x - 2y(k-3) - 16k = 0 \qquad \textbf{(A)}$$

Essa, al variare di k, rappresenta ancora una circonferenza ed è quindi l'equazione di un fascio di circonferenze. Come nel caso dei fasci di parabole, le due circonferenze che abbiamo considerato sono le curve generatrici del fascio; la prima di esse si ottiene per $k = 0$, non è possibile invece ricavare l'equazione della seconda in corrispondenza di un particolare valore di k e diciamo che si ottiene per $k \to \infty$.
Tutte le circonferenze di questo fascio passano per i punti di intersezione, se esistono, delle due circonferenze generatrici.
Nel nostro caso, risolvendo il sistema formato dalle loro equazioni otteniamo i punti

$$A\left(\frac{8}{5}, -\frac{14}{5}\right) \quad \text{e} \quad B(-4, 0)$$

che costituiscono i **punti base** del fascio.
Quando $k = -1$, l'equazione (**A**) non è più quella di una circonferenza, bensì quella di una retta, nel nostro caso la retta di equazione

$$4x + 8y + 16 = 0 \quad \text{cioè semplificando} \quad x + 2y + 4 = 0$$

che rappresenta l'**asse radicale** del fascio (la retta AB in ***figura 1***).

Per risolvere il sistema

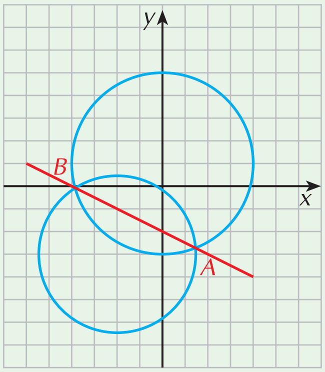
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 16 = 0 \end{cases}$$

applica il metodo di riduzione sottraendo membro a membro le due equazioni:

$$\begin{cases} 4x + 8y + 16 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 16 = 0 \end{cases}$$

Risolvi poi il sistema ottenuto.

Figura 1



In generale, date due circonferenze di equazioni:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

la loro combinazione lineare

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0}$$

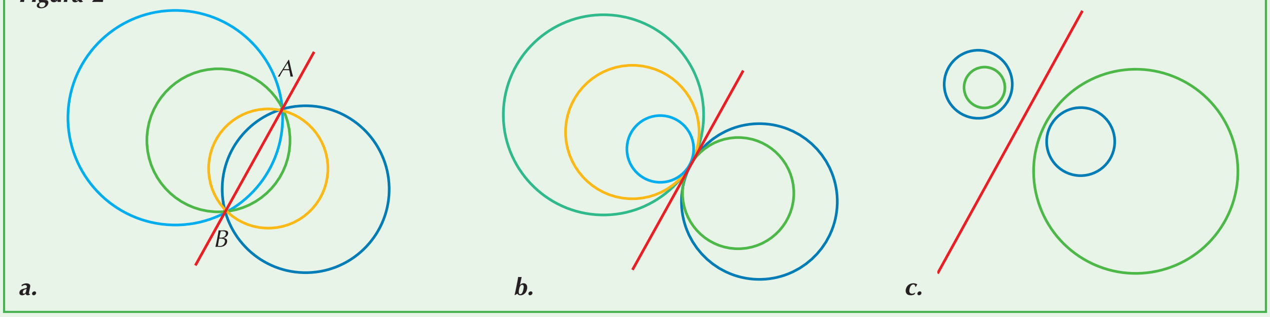
rappresenta l'**equazione di un fascio di circonferenze** di cui esse sono le generatrici.

Per $k = -1$ si ottiene l'equazione dell'**asse radicale**.

A seconda della posizione delle due circonferenze generatrici avremo vari tipi di fasci:

- se le due circonferenze sono secanti, il fascio ha due punti base e l'asse radicale è la retta che passa per questi due punti (***figura 2a***);
- se le due circonferenze sono tangenti, il fascio ha due punti base coincidenti (in pratica un solo punto) e l'asse radicale è la tangente comune a tutte le circonferenze (***figura 2b***);
- se le due circonferenze non si intersecano, il fascio non ha punti base e l'asse radicale non interseca le due circonferenze (***figura 2c***).

Figura 2



Primo esempio

Determina gli eventuali punti base del fascio di circonferenze di equazione:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 + k\left(x^2 + y^2 + 3x - y + 2\right) = 0$$

I punti base del fascio, se esistono, si trovano intersecando due sue qualunque circonferenze; poiché nell'equazione data si individuano facilmente quelle delle due generatrici, risolviamo il sistema delle loro equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

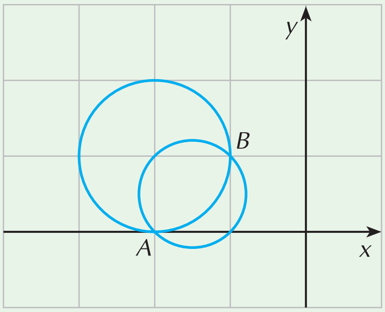
Sottraendo membro a membro otteniamo

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

e risolvendo individuiamo due punti base di coordinate (***figura 3***):

$$A(-2,\ 0) \quad \text{e} \quad B(-1,\ 1)$$

Figura 3



Secondo esempio

Dopo aver individuato i punti base del fascio di equazione

$$x^2 + y^2 + (k-1)x + (k+2)y + k - 2 = 0$$

troviamo la circonferenza del fascio che è tangente alla retta r di equazione $x + y + 2 = 0$.

Riscriviamo l'equazione del fascio mettendo in evidenza il parametro k:

$$x^2 + y^2 - x + 2y - 2 + k(x + y + 1) = 0$$

Notiamo che il fascio è stato ottenuto combinando linearmente una circonferenza con una retta, che rappresenta l'asse radicale del fascio. Possiamo quindi intersecare le due curve generatrici risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x + 2y - 2 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Troviamo così i punti base $A(-1, 0)$ e $B\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

Per individuare la circonferenza tangente a r calcoliamo il centro e il raggio della generica circonferenza del fascio:

$$C\left(\frac{1-k}{2}, -\frac{k+2}{2}\right) \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{(k-1)^2 + (k+2)^2 - 4(k-2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - 2k + 13}$$

Calcoliamo la distanza di C dalla retta r: $\dfrac{\left|\dfrac{1-k}{2} - \dfrac{k+2}{2} + 2\right|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|-2k+3|}{2\sqrt{2}}$

Imponiamo che la distanza di C da r sia uguale al raggio; otteniamo così l'equazione

$$\frac{|-2k+3|}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - 2k + 13} \quad \text{da cui ricaviamo che} \quad k = -\frac{17}{8}$$

L'equazione della circonferenza richiesta si ottiene da quella del fascio ponendo $-\frac{17}{8}$ al posto di k; otteniamo così $8x^2 + 8y^2 - 25x - y - 33 = 0$.

Individua generatrici, punti base, asse radicale e retta dei centri dei fasci di circonferenze rappresentati dalle seguenti equazioni.

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$x^2 + y^2 - 2 + k(x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2) = 0$

L'equazione del fascio si presenta come la combinazione lineare delle due circonferenze di equazioni

$$x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$$

Esse rappresentano quindi le generatrici del fascio.

Intersecando tali circonferenze trovi le coordinate dei punti base.

L'asse radicale si ottiene per $k =$ .... ed ha equazione ....

Per determinare la retta dei centri puoi: scrivere l'equazione della retta che passa per i centri delle circonferenze generatrici oppure scrivere l'equazione della perpendicolare all'asse radicale che passa per il punto medio del segmento individuato dai punti base. [$(\pm 1, \pm 1)$; $x - y = 0$; $x + y = 0$]

2 $x^2 + y^2 - 1 + k(x^2 + y^2 - x - y) = 0$ [$(0, 1)$; $(1, 0)$; $y = -x + 1$; $y = x$]

3 $x^2 + y^2 - 4y - 4 + k(x^2 + y^2 + 6x + 2y + 8) = 0$ [$(-2, 0)$; $y = -x - 2$; $y = x + 2$]

4 $x^2 + y^2 - 4x + 4y + k(x^2 + y^2 - 4x - 6y) = 0$ [$(0, 0)$; $(4, 0)$; $y = 0$; $x = 2$]

5 $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 30 + k(x^2 + y^2 - 10) = 0$ [$(3, 1)$; $y = -3x + 10$; $x - 3y = 0$]

6 $x^2 + y^2 - 2x - 6y + k(x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6) = 0$ [nessuno; non esiste; non esiste]

7 Del fascio di circonferenze di equazione $(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 - 2x - 4ky + 2k = 0$ puoi dire che:

a. le generatrici hanno equazioni $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e $x^2 + y^2 - 4y = 0$ V F

b. ha due punti base V F

c. i centri delle circonferenze si trovano tutti sulla retta $x = 1$ V F

d. ha per asse radicale la retta di equazione $x - 2y + 1 = 0$. V F

8 Dopo aver determinato gli elementi fondamentali (generatrici, punti base) del fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + (k - 6)x + (6 - k)y + 9 - 3k = 0$ trova per quali valori di k si ottiene:

a. la circonferenza del fascio che passa per il punto $P(1, 2)$ [5]

b. la circonferenza di raggio 3 [0,6]

c. la circonferenza tangente alla retta $x + y - 5 = 0$. [−1,7]

9 Dopo aver determinato gli elementi fondamentali del fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 4x - y + k(x^2 + y^2 - 2x) = 0$ determina per quale valore di k si ottengono:

a. la circonferenza passante per il punto $(2, 1)$ [−12]

b. la circonferenza di raggio 1 $\left[\frac{13}{24}\right]$

c. la circonferenza con centro sull'asse y. [2]

10 Dopo aver determinato gli elementi fondamentali del fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + (k - 8)x - 4k + 16 = 0$ determina per quali valori di k si ottengono:

a. la circonferenza degenere [0]

b. la circonferenza passante per O [4]

c. la circonferenza di centro $(6, 0)$ [-4]

d. le circonferenze tangenti alla retta $y = 4$ [$8, -8$]

e. le circonferenze secanti la retta $y = 4$. [$k < -8 \vee k > 8$]

11 Dopo aver determinato gli elementi fondamentali del fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 2(k + 1)x + (k - 1)y - k = 0$ determina per quali valori di k si ottengono:

a. la circonferenza Γ_1 avente centro sulla bisettrice del primo e terzo quadrante [-3]

b. la circonferenza passante per il centro di Γ_1 [-2]

c. le circonferenze di raggio $\sqrt{5}$ [$-3; 1$]

d. la circonferenza avente il centro nell'origine. [$\nexists k$]

12 Dopo aver determinato gli elementi fondamentali del fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + kx - 2y - 2 = 0$, determina il valore di k in modo che la circonferenza corrispondente:

a. abbia centro sull'asse y [0]

b. abbia centro sulla bisettrice del primo e terzo quadrante [-2]

c. abbia raggio $\sqrt{5}$ [$\pm 2\sqrt{2}$]

d. passi per il punto $(2, 2)$ [-1]

e. sia tangente all'asse x. [$\nexists k$]

13 Dopo aver determinato gli elementi fondamentali del fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + (2k - 1)x - (k + 4)y + k + 3 = 0$ determina k in modo che la circonferenza corrispondente:

a. abbia centro sull'asse x [-4]

b. abbia centro nel primo quadrante $\left[-4 < k < \frac{1}{2}\right]$

c. passi per l'origine [-3]

d. passi per il punto $(-1, -1)$ [$\nexists k$]

e. sia tangente all'asse y. [-2]