Concetti chiave e regole

Il sistema di riferimento nello spazio

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali nello spazio, ciascun punto è individuato da una terna ordinata di numeri (x, y, z) che rappresentano rispettivamente la sua ascissa, la sua ordinata e la sua quota. In tale sistema di riferimento, dati i punti $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, si ha che:

- la **misura del segmento** AB è $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

  e, in particolare,
  se AB è parallelo all'asse x $\rightarrow$ $\overline{AB} = |x_2 - x_1|$
  se AB è parallelo all'asse y $\rightarrow$ $\overline{AB} = |y_2 - y_1|$
  se AB è parallelo all'asse z $\rightarrow$ $\overline{AB} = |z_2 - z_1|$

- il **punto medio** M del segmento AB ha come coordinate la semisomma delle coordinate di A e di B:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

I vettori nello spazio

Un vettore $\vec{v}$ nello spazio è individuato dalle sue componenti cartesiane (v_x, v_y, v_z).

Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{s}$ ed un numero reale k, si definiscono le seguenti operazioni:

- moltiplicazione per uno scalare $k \cdot \vec{v} = (kv_x, kv_y, kv_z)$
- somma e differenza $\vec{v} \pm \vec{s} = (v_x \pm s_x, v_y \pm s_y, v_z \pm s_z)$
- prodotto scalare $\vec{v} \bullet \vec{s} = vs \cos\vartheta$ oppure, evidenziando le componenti $\vec{v} \bullet \vec{s} = v_x s_x + v_y s_y + v_z s_z$
- Due vettori sono **paralleli** se e solo se hanno le componenti proporzionali.
- Due vettori sono **perpendicolari** se e solo se la somma dei prodotti delle loro componenti è uguale a zero.

Il piano e la sua equazione

Un piano nello spazio ha equazione della forma $ax + by + cz + d = 0$

In particolare:
- se $d = 0$ il piano passa per l'origine
- se manca una delle variabili, il piano è parallelo all'asse di quella variabile
- se mancano due variabili, il piano è parallelo al piano di quelle variabili.

Due piani di equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sono poi:

- **paralleli** se e solo se i coefficienti delle tre variabili sono proporzionali: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$
- **perpendicolari** se e solo se $aa' + bb' + cc' = 0$

Inoltre l'equazione del piano che passa per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ed è parallelo a quello di equazione $ax + by + cz + d = 0$ si trova con la formula

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

La distanza del punto $P(x_0, y_0, z_0)$ dal piano $ax + by + cz + d = 0$ si calcola con la formula

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

La retta e la sua equazione

Una retta nello spazio si può individuare mediante:

- un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ed il vettore $\vec{v} = (\ell, m, n)$ ad essa parallelo le cui componenti rappresentano i **parametri direttori** della retta. In questo caso la sua equazione è:

in forma parametrica $\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$

in forma normale $\dfrac{x - x_0}{\ell} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ se $\ell,\ m,\ n \neq 0$

- due punti $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ e $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ ed in questo caso la sua equazione è:

in forma parametrica $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$

in forma normale $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ se $x_1 \neq x_2 \ \vee \ y_1 \neq y_2 \ \vee \ z_1 \neq z_2$

- due piani di cui essa è intersezione: $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$

in questo caso i parametri direttori sono dati dalle espressioni: $\ell = bc' - cb'$ $m = ca' - ac'$ $n = ab' - ba'$

Parallelismo e perpendicolarità fra rette e piani

Date due rette di parametri direttori $\ell,\ m,\ n$ e $\ell',\ m',\ n'$ ed un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$, si ha che:

- le due rette sono **parallele** se e solo se i parametri direttori sono proporzionali: $\dfrac{\ell}{\ell'} = \dfrac{m}{m'} = \dfrac{n}{n'}$
- le due rette sono **perpendicolari** se e solo se $\ell\ell' + mm' + nn' = 0$
- la retta è **parallela al piano** se e solo se $a\ell + bm + cn = 0$
- la retta è **perpendicolare al piano** se e solo se $\dfrac{\ell}{a} = \dfrac{m}{b} = \dfrac{n}{c}$

Inoltre:

- la retta che passa per il punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ ed è perpendicolare al piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ ha equazione
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$
- il piano che passa per il punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ ed è perpendicolare alla retta di parametri direttori $\ell,\ m,\ n$ ha equazione
$$\ell(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$
- due rette sono **sghembe** se, essendo $P(x_1,\ y_1,\ z_1)$ un punto della prima e $Q(x_2,\ y_2,\ z_2)$ un punto della seconda, si ha: $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell & m & n \\ \ell' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$

La superficie sferica

La superficie sferica di centro $C(x_0,\ y_0,\ z_0)$ e raggio r ha equazione: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$
Viceversa, ogni equazione di secondo grado della forma
$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$
rappresenta una sfera di centro $C\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}, -\dfrac{c}{2}\right)$ e raggio $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$ se e solo se $a^2 + b^2 + c^2 - 4d \geq 0$.

La condizione di tangenza tra un piano e una sfera è che la distanza del centro della sfera dal piano sia uguale al raggio.