

Concetti chiave e regole

Il concetto di probabilità

In un esperimento aleatorio:

- lo **spazio campionario** è l'insieme di tutti i possibili esiti dell'esperimento
- **evento aleatorio** è uno dei possibili esiti di un esperimento aleatorio.

La probabilità di un evento aleatorio E si può definire in modi diversi a seconda della tipologia dell'esperimento; in base alla **definizione classica**, se f è il numero dei casi favorevoli ad un evento e n è il numero dei casi possibili, allora

$$p(E) = \frac{f}{n} \text{ ed è } 0 \leq p(E) \leq 1.$$

In particolare, se $p(E) = 0$ l'evento è impossibile, se $p(E) = 1$ l'evento è certo.

Eventi ed insiemi

Dati due eventi A e B dello stesso spazio campionario:

- l'**evento opposto** ad A è l'evento \bar{A} che si verifica, nell'ambito di Ω , quando non si verifica A
- l'**evento unione** $A \cup B$ si verifica quando si verifica almeno uno degli eventi A o B
- l'**evento intersezione** $A \cap B$ si verifica quando si verificano entrambi gli eventi A e B ; se l'intersezione di due eventi è l'insieme vuoto, essi si dicono **incompatibili**.

I teoremi sulla probabilità

Per calcolare la probabilità di un evento che è la combinazione di più eventi si applicano i seguenti teoremi:

- teorema della **probabilità contraria**: $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- teorema della **probabilità totale**: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
e, nel caso di eventi **incompatibili**, essendo $p(A \cap B) = 0$: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

La probabilità composta

In alcuni casi, la probabilità di un evento A dipende dal verificarsi di un altro evento B ; si parla allora di **probabilità condizionata** e si scrive $p(A|B)$. La probabilità condizionata è definita dalla formula (se rispettivamente nei due casi B e A non sono gli eventi impossibili):

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \text{e analogamente} \quad p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Se da queste due relazioni ricaviamo la probabilità dell'evento intersezione otteniamo il teorema della **probabilità composta**:

- la probabilità dell'intersezione di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno di essi per la probabilità condizionata dell'altro, supposto che il primo si sia verificato:

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

Quando $p(A|B) = p(A)$, cioè quando il sapere che si è verificato B non altera la probabilità di A , i due eventi si dicono **indipendenti**; nel caso di eventi indipendenti il teorema della probabilità composta diventa:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Altri modelli di probabilità

La probabilità di un evento può essere valutata secondo altri due modelli:

- secondo il **modello statistico**, è il rapporto fra il numero f di volte in cui l'evento si è verificato ed il numero n di prove fatte, quando n è molto grande; la **legge empirica del caso** ci dice poi che tale valore di probabilità, per n molto grande, tende ad essere uguale alla probabilità teorica intesa in senso classico
- secondo il **modello soggettivista**, è il rapporto fra il prezzo P che un individuo è disposto a pagare, ed eventualmente a perdere se l'evento non si verifica, e la somma S che riceverà in cambio al verificarsi dell'evento.