

La risoluzione grafica

Le equazioni o disequazioni logaritmiche che coinvolgono altre espressioni della variabile, per esempio espressioni polinomiali, non possono essere risolte per via algebrica ed è necessario ricorrere a metodi grafici; vediamo alcuni esempi.

Primo esempio

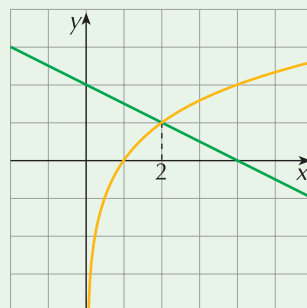
$$\log_2 x = -\frac{1}{2}x + 2$$

Disegniamo le funzioni: $y = \log_2 x$ e $y = -\frac{1}{2}x + 2$

Dal grafico sembra che le due curve si intersechino in $x = 2$; procediamo alla verifica

$$\log_2 2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 \quad \rightarrow \quad 1 = 1$$

La soluzione di questa equazione è $x = 2$.



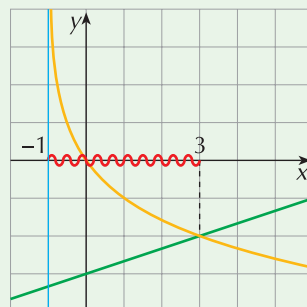
Secondo esempio

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \frac{1}{3}x - 3$$

Costruiamo i grafici delle funzioni: $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ e $y = \frac{1}{3}x - 3$.

Tali curve si intersecano nel punto $x = 3$ (verificalo).

Dovendo essere la funzione esponenziale "maggiore" della retta, la soluzione della disequazione è rappresentata dai valori di x per i quali il grafico dell'esponenziale si trova "al di sopra" del grafico della retta, cioè per $-1 < x < 3$.



Terzo esempio

$$1 - 3x^2 \leq \ln x$$

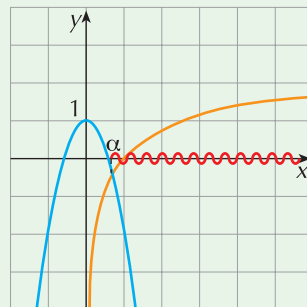
Confrontiamo i grafici delle funzioni: $y = 1 - 3x^2$ e $y = \ln x$.

La prima funzione è una parabola, la seconda è una curva logaritmica elementare; esse si intersecano nel punto di ascissa α dove

$$0 < \alpha < 1$$

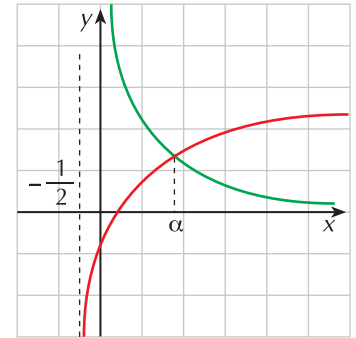
Poiché vogliamo che la parabola sia "minore o uguale" della curva logaritmica, le soluzioni della disequazione sono i valori di x tali che

$$x \geq \alpha$$



ESERCIZI

- 1** In figura sono rappresentati i grafici delle funzioni $f(x)$ (in rosso) definita per $x > -\frac{1}{2}$ e $g(x)$ (in verde) definita per $x > 0$; si può dire che la disequazione $f(x) \leq g(x)$ è verificata per:

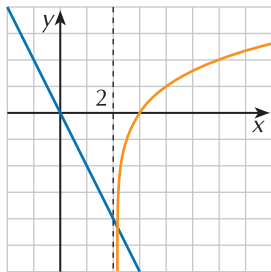


- a. $0 < x \leq \alpha$ b. $x \leq \alpha$
 c. $-\frac{1}{2} \leq x \leq \alpha$ d. $0 \leq x \leq \alpha$

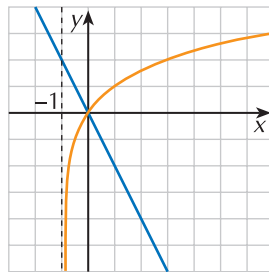
- 2** Per risolvere graficamente l'equazione $\ln(x+2) + x = 0$ occorre confrontare le due funzioni:

- a. $f(x) = \ln(x+2)$ e $g(x) = -x$ b. $f(x) = \ln(x+2)$ e $g(x) = x$ c. nessuna delle precedenti

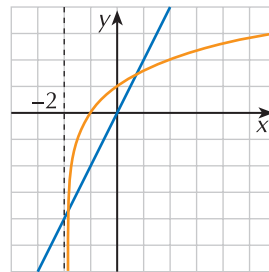
- 3** Quale fra i seguenti grafici permette di individuare le soluzioni della disequazione $\log_2(x+2) + 2x > 0$?



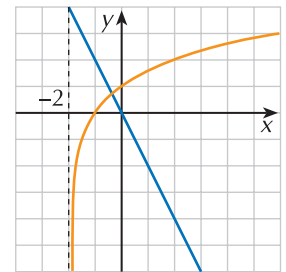
a.



b.



c.



d.

Risolvi graficamente le seguenti equazioni logaritmiche (utilizza eventualmente GeoGebra o Wiris per determinare un valore approssimato delle radici).

4 ESERCIZIO GUIDATO

$$\log x - 3x + 2 = 0$$

Scriviamo l'equazione nella forma $\log x = 3x - 2$ e confrontiamo i grafici delle funzioni

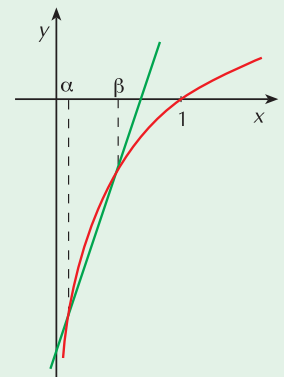
$$y = \log x \quad \text{e} \quad y = 3x - 2$$

Essi si intersecano nei punti di ascissa α e β dove

$$0 < \alpha < 0,1 \quad \text{e} \quad 0,5 < \beta < 0,6$$

L'equazione ammette dunque le due soluzioni

$$x = \alpha \quad \vee \quad x = \beta$$



5 $x = \log_{\frac{1}{2}} x$ $\log_3 x = 1 - \ln x$

$S = \{\alpha\}$ con $0 < \alpha < 1$; $S = \{\alpha\}$ con $1 < \alpha < e$

6 $x + \ln x = 0$ $\log_2 x = \log_{\frac{4}{3}}(x+1) + 2$

$S = \{\alpha\}$ con $0 < \alpha < 1$; $S = \{\alpha\}$ con $0 < \alpha < 1$

7 $\log_{\frac{1}{4}} x = 4 - x^2$ $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_3(x-1) - 1$

$S = \{\alpha, \beta\}$ con $0 < \alpha < 1 \wedge 2 < \beta < 3$; $S = \{2\}$

$$8 \quad \log_2 x + 1 = (x - 1)^2$$

$$[S = \{\alpha, \beta\} \text{ con } 0 < \alpha < 1 \wedge 2 < \beta < 3]$$

$$9 \quad \log_3 (x + 4) = e^x$$

$$[S = \{\alpha, \beta\} \text{ con } -3 < \alpha < -2,5 \wedge 0 < \beta < 1]$$

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni logaritmiche (utilizza eventualmente GeoGebra o Wiris per determinare un valore approssimato delle radici).

$$10 \quad 2x + \log_5 x \geq 0$$

$$[x > \alpha; 0 < \alpha < 1]$$

$$11 \quad 2^x + \log x > 0$$

$$[x > \alpha; 0 < \alpha < 0,5]$$

$$12 \quad \log_2 (x - 3) < -x$$

$$[3 < x < \alpha; 3 < \alpha < 3,5]$$

$$13 \quad \ln (x + 1) \leq x^2$$

$$[-1 < x \leq 0 \vee x \geq \alpha; 0,5 < \alpha < 1]$$

$$14 \quad \log_{\frac{1}{2}} x \geq x^2 - 3x + 1$$

$$[0 < x \leq 2]$$

$$15 \quad 3x - 1 \leq \log_2 x$$

$$[\text{mai verificata}]$$

$$16 \quad \log_7 2x - 3x < -2$$

$$[0 < x < \alpha \vee x > \beta; 0 < \alpha < 0,2 \text{ e } 0,5 < \beta < 1]$$

Risultati di alcuni esercizi.

1 d.

2 a.

3 d.