APPROFONDIMENTO

Le equazioni e le disequazioni con i moduli

Il valore assoluto o modulo di un numero a ha questo significato:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Per esempio: $|+5| = 5$ perché $a = +5 > 0$; $|-7| = -(-7) = 7$ perché $a = -7 < 0$.

Quindi se all'interno delle due barre che indicano il valore assoluto vi è un numero, basta considerare il numero stesso se si tratta di un numero positivo, il suo opposto se si tratta di un numero negativo, zero se il numero dato è zero.

Un analogo significato si deve attribuire al modulo di un'espressione. Per esempio:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{se } x-2 < 0 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ 2-x & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Questo significa che il modulo di un'espressione deve essere considerato come una quantità positiva o tutt'al più nulla. Per poter risolvere un'equazione o una disequazione nelle quali l'incognita si trova in un'espressione che fa parte di un modulo, è necessario togliere il simbolo di modulo, distinguendo il caso in cui il suo argomento è positivo o nullo da quello in cui è negativo. Vediamo come si deve procedere attraverso degli esempi.

Le equazioni

Risolviamo l'equazione $x + |5x-2| = 2x + 4$

Per poter togliere il modulo dobbiamo conoscere il segno del binomio $5x-2$:

$$|5x-2| \begin{cases} 5x-2 & \text{se } x \geq \dfrac{2}{5} \\ 2-5x & \text{se } x < \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$x + |5x-2|$

se è positivo
$x + (5x-2)$

se è negativo
$x + (-5x+2)$

Possiamo quindi dire che l'equazione è equivalente ai due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{2}{5} \\ x + \boxed{5x-2} = 2x+4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < \dfrac{2}{5} \\ x + \boxed{2-5x} = 2x+4 \end{cases}$$

da cui $$\begin{cases} x \geq \dfrac{2}{5} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < \dfrac{2}{5} \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Poiché $\dfrac{3}{2}$ è maggiore di $\dfrac{2}{5}$ e $-\dfrac{1}{3}$ è minore di $\dfrac{2}{5}$, ciascuna soluzione soddisfa il proprio sistema e le soluzioni sono entrambe accettabili: $S = \left\{-\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{2}\right\}$.

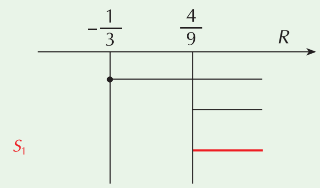
Le disequazioni

Risolviamo la disequazione $|3x+1|+2x>5-4x$

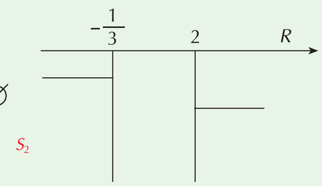
Studiamo il segno dell'argomento del modulo: $|3x+1| = \begin{cases} 3x+1 & \text{se } x \geq -\dfrac{1}{3} \\ -3x-1 & \text{se } x < -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

La disequazione è quindi equivalente ai due sistemi:

- Primo sistema: $\begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ \boxed{3x+1}+2x>5-4x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ x > \dfrac{4}{9} \end{cases} \rightarrow \quad S_1 : x > \dfrac{4}{9}$



- Secondo sistema: $\begin{cases} x < -\dfrac{1}{3} \\ \boxed{-3x-1}+2x>5-4x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{1}{3} \\ x > 2 \end{cases} \rightarrow \quad S_2 : \varnothing$



L'insieme delle soluzioni è l'**unione** dei due insiemi S_1 e S_2, ma poiché l'insieme S_2 è vuoto, la disequazione è verificata nell'intervallo $x > \dfrac{4}{9}$.

ATTENZIONE AGLI ERRORI

Gli insiemi S_1 e S_2 sono sempre disgiunti; per determinare l'insieme delle soluzioni di una disequazione con i moduli si deve trovare l'unione degli insiemi S_1 e S_2 **e non l'intersezione** che è sempre l'insieme vuoto.

ESERCIZI

Applicazione

Risolvi le seguenti equazioni con i moduli.

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$3+|1-4x| = 2(x-1)+5x$

Studiamo il segno dell'argomento del modulo: $|1-4x| = \begin{cases} 1-4x & \text{se } x \leq \dfrac{1}{4} \\ 4x-1 & \text{se } x > \dfrac{1}{4} \end{cases}$

L'equazione è quindi equivalente a:

$$\begin{cases} x \leq \dfrac{1}{4} \\ 3+(1-4x) = 2(x-1)+5x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x > \dfrac{1}{4} \\ 3+(4x-1) = 2(x-1)+5x \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione del primo sistema:

$3+1-4x = 2x-2+5x \quad \rightarrow \quad -11x = -6 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{6}{11}$

Poiché $\dfrac{6}{11}$ non soddisfa la condizione $x \leq \dfrac{1}{4}$, la soluzione trovata non è accettabile.

Risolviamo l'equazione del secondo sistema:

$3+4x-1=2x-2+5x \quad \rightarrow \quad -3x=-4 \quad \rightarrow \quad x=\frac{4}{3}$

Poiché $\frac{4}{3}$ soddisfa la condizione $x>\frac{1}{4}$, la soluzione trovata è accettabile.

L'insieme delle soluzioni è quindi: $S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

2 $6+|x|=3x$ $\qquad$ $3-|x+2|=x-1$ $\qquad$ $[S=\{3\};\ S=\{1\}]$

3 $|7x+2|=12$ $\qquad$ $2x+|1-x|=1-x$ $\qquad$ $\left[S=\left\{\frac{10}{7},\ -2\right\};\ S=\{0\}\right]$

4 $|2x-3|=x+2$ $\qquad$ $1-x=2|3x+2|$ $\qquad$ $\left[S=\left\{5,\ \frac{1}{3}\right\};\ S=\left\{-\frac{3}{7},\ -1\right\}\right]$

5 $1-|3-x|=5x$ $\qquad$ $3+2|x-4|=x+1$ $\qquad$ $\left[S=\left\{-\frac{1}{2}\right\};\ S=\left\{\frac{10}{3},\ 6\right\}\right]$

6 $|x-1|=2x-3$ $\qquad$ $|6x-1|+3=4(x+2)$ $\qquad$ $\left[S=\{2\};\ S=\left\{-\frac{2}{5},\ 3\right\}\right]$

7 $|2x-1|=5x$ $\qquad$ $|3x+5|-x=1$ $\qquad$ $\left[S=\left\{\frac{1}{7}\right\};\ S=\varnothing\right]$

8 $2+|3x-1|=2x$ $\qquad$ $2-x=1+2|1-5x|$ $\qquad$ $\left[S=\varnothing;\ S=\left\{\frac{1}{9},\ \frac{3}{11}\right\}\right]$

9 $|x-10|=2x+9$ $\qquad$ $3+2|x|=x-5$ $\qquad$ $\left[S=\left\{\frac{1}{3}\right\};\ S=\varnothing\right]$

10 $2x+|2+x|=8x-1$ $\qquad$ $\frac{1}{6}|x+3|=2$ $\qquad$ $\left[S=\left\{\frac{3}{5}\right\};\ S=\{-15,\ 9\}\right]$

Risolvi le seguenti disequazioni con i moduli.

11 **ESERCIZIO GUIDATO**

$|x-4|+x>3x+7$

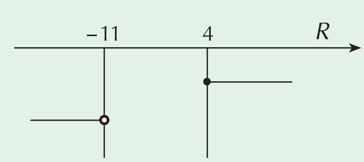
Segno dell'argomento del modulo: $|x-4|=\begin{cases} x-4 & \text{se } x\geq 4 \\ 4-x & \text{se } x<4 \end{cases}$

La disequazione è quindi equivalente ai due sistemi:

$$\begin{cases} x\geq 4 \\ \boxed{x-4}+x>3x+7 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x<4 \\ \boxed{4-x}+x>3x+7 \end{cases}$$

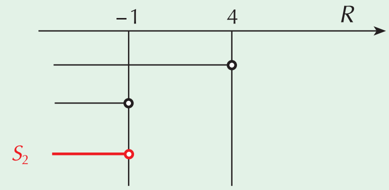
Risolvendo il primo sistema si ottiene: $\begin{cases} x\geq 4 \\ -x>11 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x\geq 4 \\ x<-11 \end{cases}$

Dall'analisi della tabella a lato si deduce che il primo sistema non ha soluzioni, cioè $S_1=\varnothing$.



Risolvendo il secondo sistema si ottiene: $\begin{cases} x < 4 \\ -3x > 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x < 4 \\ x < -1 \end{cases}$

Disponiamo i dati in tabella:



da cui $\quad S_2: \quad x < -1$

L'unione dei due insiemi è ancora l'insieme S_2, quindi la disequazione è verificata se $\quad x < -1$.

12 $6 - |3 - 8x| \le x + 4 \qquad 2 + |x| > 3x + 4 \qquad \left[x \le \frac{1}{7} \vee x \ge \frac{5}{9};\ x < -\frac{1}{2}\right]$

13 $|3x - 4| + x > 2(x - 1) \qquad x - |x - 2| > 3(x - 1) \qquad [S = R;\ x < 1]$

14 $1 - |2x + 9| > x - 4 \qquad 2(x + 3) - 4|x| > 0 \qquad \left[-14 < x < -\frac{4}{3};\ -1 < x < 3\right]$

15 $\frac{x + 1}{3} + \frac{|3 - 2x|}{4} > \frac{1}{12} \qquad \frac{1}{2}|x - 4| + x \le 2 \qquad [S = R;\ x \le 0]$

16 $\frac{3}{4}|5x - 1| > 1 + \frac{x}{2} \qquad 3 - \frac{4}{5}|2 - x| \ge x \qquad \left[x < -\frac{1}{17} \vee x > \frac{7}{13};\ x \le \frac{23}{9}\right]$

17 $|2 - 7x| + x < 3x - 1 \qquad |x| - x \ge 3 \qquad \left[S = \varnothing;\ x \le -\frac{3}{2}\right]$

18 $\frac{2x + 9}{3} - \frac{|5 - x|}{4} \ge \frac{1}{6} \qquad \frac{3}{4} - \frac{7|x - 1|}{2} > 1 \qquad \left[x \ge -\frac{19}{11};\ S = \varnothing\right]$