

Concetti chiave e regole

I numeri naturali

I numeri naturali sono quelli della successione $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

L'insieme dei numeri naturali si indica con N , l'insieme dei numeri naturali privato dello zero si indica con N_0 .

Le operazioni interne a N sono solo l'addizione e la moltiplicazione, mentre la sottrazione è possibile solo se il primo numero è maggiore del secondo, la divisione è possibile solo se il primo numero è multiplo del secondo.

L'addizione e la moltiplicazione sono:

- commutative: $a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$
- associative: $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- inoltre vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Le potenze e le proprietà delle potenze

La potenza a^n , con n numero naturale maggiore di 1, equivale al prodotto $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$.

Si definisce poi $a^1 = a$ e $a^0 = 1$, mentre non ha significato la scrittura 0^0

Valgono le seguenti proprietà: • $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ • $a^n : a^m = a^{n-m}$ • $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

La divisibilità in N

Se $c = a \cdot b$ si dice che c è **multiplo** di a secondo b ; si dice anche che c è divisibile per a e per b .

Un numero che è divisibile solo per se stesso e per 1 si dice **primo**; due numeri che non hanno divisori comuni oltre all'unità si dicono **primi tra loro**.

Scomporre un numero naturale in fattori primi significa scriverlo come prodotto di soli fattori primi; la scomposizione di un numero in fattori primi è unica.

Il **massimo comun divisore** (M.C.D.) fra due numeri naturali è il più grande fra i divisori comuni ai due numeri; per trovarlo, si scompongono i due numeri e si calcola il prodotto dei soli fattori comuni presi con il minimo esponente.

Il **minimo comune multiplo** (m.c.m.) fra due numeri naturali è il più piccolo fra i multipli comuni ai due numeri; per trovarlo, si scompongono i due numeri e si calcola il prodotto dei fattori comuni e non comuni presi con il massimo esponente.

L'algoritmo euclideo

Per determinare $M.C.D.(a, b)$ si può anche ricorrere:

- al metodo delle sottrazioni successive con $a > b$ (eventualmente scambiare a con b):
 $M.C.D.(a, b) = M.C.D.(a - b, b)$
il $M.C.D.$ è b quando $a - b = 0$
- al metodo delle divisioni successive: $M.C.D.(a, b) = M.C.D.(b, r)$ dove r è il resto della divisione intera $a : b$
il $M.C.D.$ è il numero b quando $r = 0$.

I numeri interi

Un **numero intero** si esprime mediante un numero naturale preceduto da un segno $+$ o da un segno $-$. Il segno $+$ indica che il numero intero esprime una quantità che si trova al di sopra di un certo livello di riferimento; il segno $-$ che si trova al di sotto. Il livello di riferimento scelto è lo zero e si dice che i numeri $+1, +2, +3, \dots$ sono **interi positivi**, i numeri $-1, -2, -3, \dots$ sono **interi negativi**; allo zero non si attribuisce alcun segno.

L'insieme dei numeri interi si indica con la lettera Z , l'insieme degli interi privato dello zero si indica con Z_0 .

Se due numeri hanno lo stesso segno si dicono **concordi**, se hanno segno diverso si dicono **discordi**.

Si chiama **valore assoluto** di un numero intero il numero stesso privato del suo segno. Due numeri interi che hanno lo stesso valore assoluto e segni opposti si dicono **opposti**.

Le operazioni in Z

La **somma** di due numeri interi si calcola con la seguente regola:

- se i due numeri sono concordati si sommano i valori assoluti dei due numeri e al risultato si attribuisce il segno comune

- se i due numeri sono discordi si calcola la differenza fra i valori assoluti e al risultato si attribuisce il segno del numero che ha valore assoluto maggiore.

Per esempio: $+3 + (+4) = +7$ $(-2) + (-6) = -8$ $+3 + (-9) = -6$

La **differenza** tra due numeri interi è la somma del primo con l'opposto del secondo.

Il **prodotto** di due numeri interi è il numero che si ottiene moltiplicando i valori assoluti dei due numeri e attribuendo segno $+$ se i due numeri sono concordi, segno $-$ se i due numeri sono discordi.

Per esempio: $(+6) \cdot (+4) = +24$ $(+2) \cdot (-3) = -6$ $(-8) \cdot (-2) = +16$

La **divisione** non è invece un'operazione interna a Z . Il quoziente tra due numeri interi si può determinare solo se il modulo del dividendo è multiplo del modulo del divisore; in tal caso il segno del quoziente si determina con la stessa regola del prodotto.

Per esempio: $(+12) : (-4) = -3$ $(-8) : (-2) = +4$ $(-15) : (+3) = -5$