APPROFONDIMENTO

Considerazioni sul concetto di numero reale

Nel biennio hai studiato che:

- tutti i numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione, e quindi di numero decimale finito o periodico, sono **razionali**

  per esempio: $\frac{3}{4}$ $\quad 2{,}54 \quad 6{,}\overline{82}$

- i numeri che non si possono scrivere sotto forma di frazione sono numeri **irrazionali**

  per esempio: $\sqrt{2}$ $\quad \sqrt[3]{5} \quad$ 0,010203040506....... (quest'ultimo numero si ottiene intercalando 0 con i numeri interi successivi nella parte decimale)

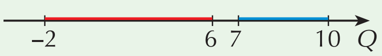
- i numeri che sono razionali oppure irrazionali sono i numeri **reali**.

La definizione rigorosa di numero reale si può dare partendo dall'insieme dei numeri razionali nel seguente modo.

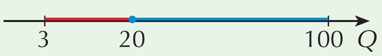
Le classi di numeri razionali

Chiamiamo **classe** un qualunque insieme di numeri razionali.
Due classi A e B di numeri razionali si dicono **separate** se tutti i numeri della prima classe sono minori o tutt'al più uguali di quelli della seconda; questo significa che le due classi o non hanno elementi in comune, oppure ne hanno uno solo.
Per esempio sono separate le classi (osserva le figure a lato):

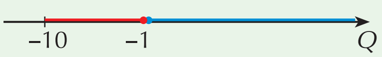
$A = \{x \in Q \mid -2 < x < 6\}$ e $B = \{x \in Q \mid 7 < x < 10\}$



$C = \{x \in Q \mid 3 < x < 20\}$ e $D = \{x \in Q \mid 20 \leq x < 100\}$

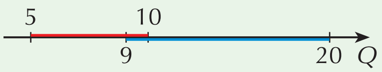


$E = \{x \in Q \mid -10 < x \leq -1\}$ e $F = \{x \in Q \mid x \geq -1\}$



non sono separate le classi:

$H = \{x \in Q \mid 5 < x < 10\}$ e $K = \{x \in Q \mid 9 < x < 20\}$



Quando due classi sono separate, può darsi che esista un numero razionale che è contemporaneamente maggiore o uguale di tutti i numeri di A e minore o uguale di tutti i numeri di B; un numero che soddisfa a questa proprietà si dice **numero separatore** delle due classi.
Per esempio, le classi A e B precedenti hanno come numero separatore un qualsiasi numero compreso fra 6 e 7; le classi C e D hanno come numero separatore 20; invece le classi

$P = \{x \in Q^+ \mid x^2 < 3\}$ e $S = \{x \in Q^+ \mid x^2 > 3\}$

non hanno numero separatore perché non esiste un numero razionale il cui quadrato è 3.
Infine due classi di numeri razionali si dicono **indefinitamente ravvicinate** se, comunque fissato un numero $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un numero in A ed un numero in B in modo che la loro differenza, in modulo, sia minore di ε.
Le classi C e D, E e F, P e S degli esempi precedenti sono indefinitamente ravvicinate, le classi A e B non lo sono.

Due classi A e B sono indefinitamente ravvicinate se la differenza tra un numero di B e un numero di A può diventare piccola tanto quanto si vuole.

Le coppie di classi contigue e la definizione di numero reale

Le definizioni ricordate finora portano ad enunciare il concetto di classi contigue di numeri razionali.

Due classi A e B di numeri razionali costituiscono una coppia di **classi contigue** (A, B) se:

- nessuna delle due classi è vuota
- sono separate, cioè $\forall a \in A \ \wedge \ \forall b \in B, \qquad a \leq b$
- sono indefinitamente ravvicinate, cioè
  $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \ \wedge \ \exists b \in B$ tali che $|a - b| < \varepsilon$.

Le coppie di classi contigue hanno la caratteristica di ammettere al più un solo numero separatore; infatti, se ne avessero due, chiamiamoli p e q, le due classi non sarebbero indefinitamente ravvicinate (basterebbe scegliere $\varepsilon < |p - q|$).
Si definisce allora il numero reale attraverso le coppie di classi contigue:

si dice numero reale ogni coppia di classi contigue di numeri razionali.

A questo punto, se la coppia ha elemento separatore (uno solo) allora il numero definito è razionale; se non c'è elemento separatore il numero definito è irrazionale.
Per esempio, la classe A dei numeri approssimati per difetto di $\frac{5}{3}$ e la classe B dei numeri approssimati per eccesso di $\frac{5}{3}$

$$A = \{1; 1{,}6; 1{,}66; 1{,}66; .....\} \quad \text{e} \quad B = \{2; 1{,}7; 1{,}67; 1{,}667; ....\}$$

costituiscono una coppia di classi contigue che ha $\frac{5}{3}$ come elemento separatore: $\frac{5}{3}$ è un numero razionale.

Le classi $P = \{x \in Q^+ \mid x^2 < 3\}$ e $S = \{x \in Q^+ \mid x^2 > 3\}$ sono una coppia di classi contigue che non ammette elemento separatore: il numero il cui quadrato è 3, cioè $\sqrt{3}$ è un numero irrazionale.

ESERCIZI

1 Delle seguenti coppie di classi di numeri razionali indica quali sono separate e quali no:

a. $A = \{a \in Q \mid -5 < a < 1\}$ e $B = \{b \in Q \mid 3 < b \leq 4\}$ [separate]

b. $A = \left\{a \in Q \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq a < 3\right\}$ e $B = \{b \in Q \mid 3 \leq b < 8\}$ [separate]

c. $A = \{a \in Q \mid -5 < a < 2\}$ e $B = \{b \in Q \mid 1 < b < 7\}$ [non separate]

d. $A = \left\{a \in Q \,\middle|\, \frac{1}{5} < a \leq 5\right\}$ e $B = \{b \in Q \mid 5 < b \leq 18\}$ [separate]

2 Delle seguenti coppie di classi di numeri razionali individua, nel caso siano separate, un numero separatore:

a. $A = \left\{a \in Q \,\middle|\, -\frac{3}{5} < a < 2\right\}$ e $B = \{b \in Q \mid 2 \leq b < 6\}$ [separate; separatore 2]

b. $A = \{a \in Q \mid -10 < a < -3\}$ e $B = \{b \in Q \mid 1 < b < 5\}$ [separate; separatori $-3 \leq x \leq 1$]

c. $A = \{a \in Q \mid 5 < a < 8\}$ e $B = \{b \in Q \mid 7 < b < 11\}$ [non sono separate]

d. $A = \{a \in Q \mid -2 < a < 0\}$ e $B = \{b \in Q \mid 1 < b < 8\}$ [separate; separatori $0 \leq x \leq 1$]

Stabilisci se le seguenti classi di numeri razionali costituiscono una coppia di classi contigue e in caso affermativo se definiscono un numero razionale o irrazionale e quale.

3 $A = \{x \in Q \mid -1 < x < 3\}$ $B = \{y \in Q \mid y > 3\}$ [si, 3]

4 $A = \{x \in Q \mid x < -1\}$ $B = \{y \in Q \mid -1 < y < 0\}$ [si, -1]

5 $A = \{x \in Q \mid x < 1\}$ $B = \{y \in Q \mid y > 2\}$ [no]

6 $A = \{x \in Q \mid 0 \leq x^3 < 2\}$ $B = \{y \in Q \mid y^3 > 2\}$ $\left[\text{si, } \sqrt[3]{2}\right]$

7 $A = \left\{x \in Q \mid x \leq \dfrac{5}{6}\right\}$ $B = \left\{y \in Q \mid y > \dfrac{5}{6}\right\}$ $\left[\text{si, } \dfrac{5}{6}\right]$

8 $A = \left\{x \in Q \mid x \leq \dfrac{3}{7}\right\}$ $B = \left\{y \in Q \mid y \geq \dfrac{3}{7}\right\}$ $\left[\text{si, } \dfrac{3}{7}\right]$

9 Individua una coppia di classi contigue di numeri razionali che abbia come elemento separatore 1.

10 Per ogni numero reale dato costruisci una coppia di classi contigue (A, B) che lo definisca:

$\dfrac{4}{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, 0,5757575757.........., $\sqrt{2}$

11 Individua una coppia di classi contigue di numeri razionali che non abbia elemento separatore.