Concetti chiave e regole

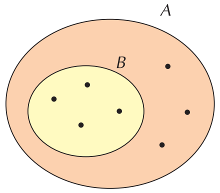
Gli insiemi e la loro rappresentazione

La parola **insieme** indica un raggruppamento di oggetti di natura qualunque pensati come un unico ente; gli oggetti che formano un insieme sono i suoi **elementi.** Un insieme è **finito** se si possono elencare tutti i suoi elementi; infinito in caso contrario. Un insieme che non ha elementi si dice **vuoto**.
Un insieme si può rappresentare:

- per **elencazione** scrivendo l'elenco dei suoi elementi all'interno di una coppia di parentesi graffe
- mediante **proprietà caratteristica** indicando la frase che individua quali sono gli elementi dell'insieme
- graficamente mediante un **diagramma di Eulero-Venn**.

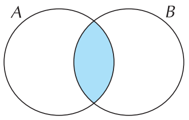
I sottoinsiemi e l'insieme delle parti

Si dice che B è un **sottoinsieme** di un insieme A se tutti gli elementi di B sono anche elementi di A e si scrive $B \subseteq A$. In particolare se in A ci sono altri elementi oltre a quelli di B, allora B è un **sottoinsieme proprio** di A e vale la relazione $B \subset A$; se in A non ci sono altri elementi oltre a quelli di B allora $B = A$. L'insieme A stesso e l'insieme vuoto sono i **sottoinsiemi impropri** di A. L'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi, propri e impropri di A, si dice **insieme delle parti** di A e si indica con il simbolo $\mathscr{P}(A)$.

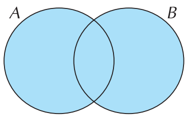


Le operazioni fra insiemi

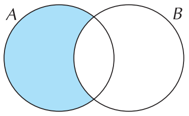
- **Intersezione:** $A \cap B$ è l'insieme i cui elementi appartengono contemporaneamente sia ad A che a B.
  Se l'intersezione fra due insiemi è vuota, i due insiemi si dicono **disgiunti**.



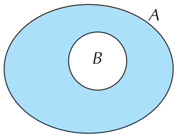
- **Unione:** $A \cup B$ è l'insieme i cui elementi appartengono ad A oppure a B, quindi anche ad entrambi.



- **Differenza:** $A - B$ è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B.



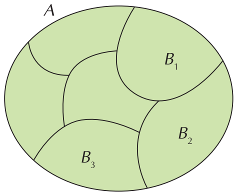
Nel caso particolare in cui B è un sottoinsieme di A, dell'insieme $A - B$ si dice che è il **complementare** di B rispetto ad A e si indica con uno dei seguenti simboli: $\mathscr{C}_A\ B$ o $\overline{B}_A$.



La partizione di un insieme

Si dice che si esegue una **partizione** di un insieme A se si possono ripartire gli elementi di A in n sottoinsiemi B_i tali che:

- nessuno dei B_i sia vuoto
- l'intersezione fra due qualsiasi di essi sia l'insieme vuoto
- l'unione di tutti i B_i dia l'insieme A.



Il prodotto cartesiano

Dati due insiemi A e B si definisce poi il **prodotto cartesiano** $A \times B$ come l'insieme i cui elementi sono tutte e sole le **coppie ordinate** (a, b) dove a è un qualunque elemento di A e b è un qualunque elemento di B.
Il prodotto cartesiano fra insiemi si può rappresentare elencando tutte le coppie che si vengono a formare oppure mediante un diagramma a frecce, mediante una tabella a doppia entrata, mediante un diagramma cartesiano oppure mediante un diagramma ad albero.

Le proposizioni

Una **proposizione** è una frase di senso compiuto della quale si può stabilire se è vera o se è falsa.

Le proposizioni obbediscono a due principi fondamentali:

- **Principio di non contraddizione**: una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa.
- **Principio del terzo escluso**: una proposizione è vera oppure falsa, non esistono altre possibilità.

Le operazioni con le proposizioni

Con le proposizioni si possono eseguire delle operazioni logiche mediante i **connettivi**:

- la **negazione** di un enunciato a è l'enunciato $\overline{a}$ (o anche $\neg\, a$) che muta il valore di verità di a
- la **congiunzione** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \wedge b$ che si considera vero solo se sono veri sia a che b
- la **disgiunzione inclusiva** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \vee b$ che si considera falso solo se sono falsi sia a che b
- la **disgiunzione esclusiva** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \dot{\vee} b$ che si considera vero solo se a e b hanno valori di verità diversi
- l'**implicazione materiale** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \rightarrow b$ che si considera falso solo se a è vero e b è falso
- la **coimplicazione materiale** fra due enunciati a e b è l'enunciato $a \leftrightarrow b$ che si considera vero solo se a e b hanno lo stesso valore di verità.

I quantificatori

Un enunciato aperto esprime spesso una proprietà che alcuni o tutti gli elementi di un insieme possiedono; per esprimere queste proprietà si usano allora i quantificatori:

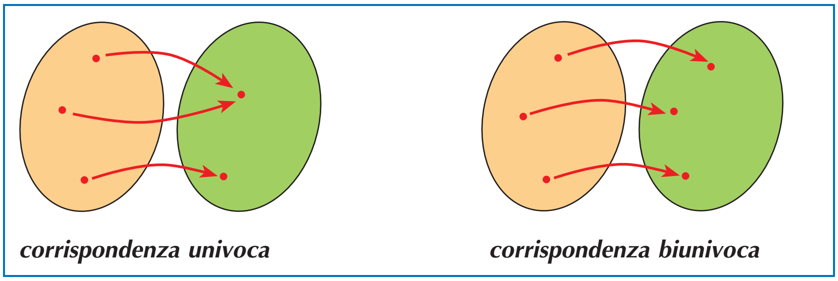
- il **quantificatore universale**, indicato dal simbolo $\forall$ seguito dal nome della o delle variabili coinvolte, esprime che una proprietà p è vera per tutti i valori che le variabili possono assumere
- il **quantificatore esistenziale**, indicato dal simbolo $\exists$ seguito dal nome della o delle variabili coinvolte, esprime che una proprietà p è vera per almeno uno dei valori che la variabile può assumere.
  Per indicare che una proprietà p non è verificata da nessuno dei valori della variabile si usa la negazione di questo quantificatore: $\nexists x$.

Le funzioni

Si dice **funzione** una corrispondenza tra gli elementi di un insieme A e quelli di un insieme B in modo che ad ogni elemento di A sia associato uno e un solo elemento di B.
Una funzione può quindi essere:

- una **corrispondenza univoca**: ad ogni x è associato un solo y
- una **corrispondenza biunivoca**: ad ogni x è associato un solo y e, viceversa, ad ogni y è associato un solo x.

Le corrispondenze biunivoche sono le sole funzioni invertibili.



Una funzione k è il **prodotto** di altre due funzioni f e g, e si scrive $k = g \circ f$, quando la funzione g è applicata agli elementi generati dalla funzione f. La funzione g, anche se è scritta per prima nel prodotto, è quella che viene applicata per seconda.