

L'insieme delle parti

Consideriamo l'insieme A degli alunni di una classe e pensiamo a tutti i modi possibili di raggruppare questi alunni: potremmo formare gruppi di un solo ragazzo, gruppi di due ragazzi con tutte le combinazioni possibili, gruppi di tre ragazzi con tutte le combinazioni possibili e così via. Possiamo quindi costruire un insieme i cui elementi sono a loro volta altri insiemi, cioè i possibili gruppi che si vengono a formare; ognuno di essi è un sottoinsieme di A .

Un insieme può dunque avere altri insiemi come elementi.

Dato un insieme A , si chiama **insieme delle parti**, e si indica con $\mathcal{P}(A)$, l'insieme che ha per elementi tutti i sottoinsiemi propri ed impropri di A .

Per esempio:

- dato l'insieme $A = \{\text{bianco, nero}\}$, i suoi possibili sottoinsiemi, impropri e propri, sono i seguenti:

$$S_1 = \emptyset \quad S_2 = A = \{\text{bianco, nero}\} \quad S_3 = \{\text{bianco}\} \quad S_4 = \{\text{nero}\}$$

$$\text{Allora } \mathcal{P}(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}.$$

- dato $A = \{1, 2, 3\}$, i suoi possibili sottoinsiemi, oltre a quelli impropri $S_1 = \emptyset$ e $S_2 = A$, sono quelli che possiamo formare con un elemento di A o con due elementi di A e sono:

$$S_3 = \{1\} \quad S_4 = \{2\} \quad S_5 = \{3\} \quad S_6 = \{1, 2\} \quad S_7 = \{1, 3\} \quad S_8 = \{2, 3\}$$

$$\text{Allora } \mathcal{P}(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8\}.$$

- l'insieme vuoto ha come unico sottoinsieme se stesso, quindi $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$.

Il numero degli elementi dell'insieme delle parti di un insieme A , cioè il numero dei sottoinsiemi (propri ed impropri) che si possono costruire a partire da A , dipende dal numero degli elementi di A . Se l'insieme A è vuoto l'insieme delle parti ha un solo elemento, se A ha un elemento l'insieme delle parti ne ha due (l'insieme vuoto e A stesso), se A ha due elementi l'insieme delle parti ne ha quattro, se A ha tre elementi $\mathcal{P}(A)$ ne ha otto.

C'è quindi una relazione fra il numero degli elementi di A ed il numero degli elementi di $\mathcal{P}(A)$:

$$0 \text{ elementi per } A \quad 2^0 = 1 \text{ elemento per } \mathcal{P}(A)$$

$$1 \text{ elemento per } A \quad 2^1 = 2 \text{ elementi per } \mathcal{P}(A)$$

$$2 \text{ elementi per } A \quad 2^2 = 4 \text{ elementi per } \mathcal{P}(A)$$

$$3 \text{ elementi per } A \quad 2^3 = 8 \text{ elementi per } \mathcal{P}(A)$$

In generale:

se A ha n elementi, $\mathcal{P}(A)$ ne ha 2^n .

ESERCIZI

Comprensione

- 1 Sia $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A . Quali delle seguenti scritte sono corrette?
a. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ b. $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$ c. $\mathcal{P}(A) \subset A$ d. $A \in \mathcal{P}(A)$ e. $\{A\} \subset \mathcal{P}(A)$
- 2 Se un insieme A ha 3 elementi, quanti elementi ha $\mathcal{P}(A)$? E se A ha 5 elementi? Qual è la regola generale per determinare il numero di elementi di $\mathcal{P}(A)$, se A è formato da n elementi?
- 3 Se $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 4\}$, $\mathcal{P}(A)$ ha:
a. 6 elementi b. 8 elementi c. 3 elementi d. 9 elementi
- 4 $\mathcal{P}(A)$ ha 64 elementi. Quanti sono gli elementi di A ?
a. 8 b. 6 c. 32 d. non si può sapere
- 5 Considerato l'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$, stabilisci quali fra le seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:
- | | |
|--|---|
| a. $\{x \mid x \text{ è una vocale}\} \subset A$ | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
| b. $\{a, b\} \subset \mathcal{P}(A)$ | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
| c. $\{a, e\} \in \mathcal{P}(A)$ | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
| d. $\{b, c, d\} \subset A$ | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
| e. $\emptyset \in A$ | |

Applicazione

- 6 Dato $A = \{a, b, c\}$ determina l'insieme delle parti di A .
- 7 Scrivi tutti gli elementi dell'insieme delle parti di $A = \{1, 2\}$. Stabilisci quindi quali delle seguenti relazioni sono corrette:
a. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ b. $\{1\} \subset \mathcal{P}(A)$ c. $0 \notin A$ d. $\emptyset \subseteq A$
- 8 Scrivi l'insieme delle parti dei seguenti insiemi:
a. $A = \{0, 1\}$ b. $B = \{0\}$ c. $C = \{\}$
- 9 Dato $A = \{x \mid x \text{ è una vocale dell'alfabeto italiano}\}$, determina $\mathcal{P}(A)$.
- 10 Considera l'insieme $A = \{1, 3, 5\}$ e l'insieme delle parti di A ; quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false? Motiva la tua risposta:
- | | |
|---|---|
| a. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
| b. $\{3\} \in \mathcal{P}(A)$ | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
| c. $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(A)$ | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
| d. $0 \in \emptyset$ | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
| e. $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$ | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
- 11 Dato l'insieme $A = \{\text{Paolo, Marco, Carlo, Anna}\}$, scrivi l'insieme delle parti di A .
- 12 Scrivi l'insieme che ha per insieme delle parti: $\{\{7\}, \{9\}, \{7, 9\}, \emptyset\}$.