Approfondimento

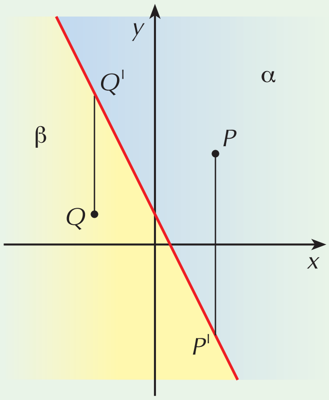
Le disequazioni lineari in due variabili

Consideriamo la disequazione nelle due variabili x e y $\quad 2x+y-1>0$:

- se pensiamo di risolverla rispetto a x otteniamo: $\quad x>-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$
- se pensiamo di risolverla rispetto a y otteniamo: $\quad y>-2x+1$

e, in entrambi i casi, non abbiamo potuto individuare un insieme numerico preciso come invece accade nelle disequazioni in una sola variabile. Possiamo tuttavia interpretare graficamente l'insieme delle soluzioni se consideriamo che l'equazione $2x+y-1=0$ nel piano cartesiano rappresenta una retta r, e che tale retta divide sempre il piano in due semipiani opposti che nella ***figura 1*** abbiamo indicato con α e β.

Figura 1



Consideriamo adesso un punto P che appartiene al semipiano α e da esso tracciamo la parallela all'asse y che incontra la retta r in P'; l'ordinata di P è maggiore dell'ordinata di P', cioè la y di P è maggiore della y di P' che è uguale a $-2x+1$. Questo significa che tutti i punti del semipiano α hanno le coordinate che soddisfano la disequazione data; basta prendere un punto a caso in questo semipiano per verificarlo:

$P(2,\,3):2\cdot 2+3-1=6 \qquad 6>0$ quindi la disequazione è verificata

Consideriamo invece i punti Q che appartengono al semipiano β e ripetiamo lo stesso ragionamento: l'ordinata di Q è minore dell'ordinata di Q', cioè la y di Q è minore della y di Q' che è uguale a $-2x+1$. Allora tutti i punti del semipiano β hanno le coordinate che non soddisfano la disequazione data. Anche in questo caso la verifica su un punto particolare conferma questo risultato:

$Q(-2,\,1): \qquad 2\cdot(-2)+1-1=-4 \qquad -4$ non è maggiore di 0, la disequazione non è verificata

L'insieme delle soluzioni di una disequazione lineare in due variabili è quindi rappresentato dai punti di un semipiano, nel nostro esempio dai punti del semipiano α. Questo vale in generale:

> una disequazione lineare in due variabili $ax+by+c>0$ ha come insieme delle soluzioni i punti di uno dei due semipiani in cui la retta $ax+by+c=0$ divide il piano.

Per individuare tale semipiano si può procedere in due modi:

- si individuano graficamente i punti che hanno un'ordinata maggiore (o minore se questo è il verso della disequazione) di quelli corrispondenti sulla retta
- si considera un punto particolare in uno dei due semipiani e si verifica se le sue coordinate soddisfano o meno la disequazione.

Vediamo qualche altro esempio.

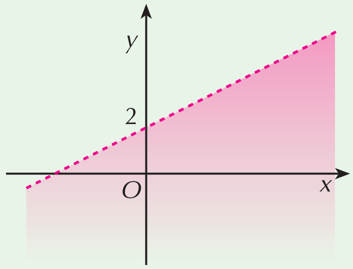
- Risolviamo graficamente la disequazione $\quad 2y-x-4<0$

  Esplicitiamo rispetto ad y: $\ y<\frac{1}{2}x+2$.

  Rappresentiamo nel piano cartesiano la retta r di equazione $y=\frac{1}{2}x+2$

  (***figura 2***): essa divide il piano in due semipiani. I punti che sono nel semipiano in colore hanno una ordinata minore dei punti con la stessa ascissa che si trovano sulla retta. I punti di tale semipiano (esclusa la retta r) rappresentano dunque le soluzioni della disequazione data.

Figura 2



In alternativa, possiamo scegliere per esempio il punto $A(3,\ 0)$ che appartiene allo stesso semipiano e controllare se verifica la disequazione: $2 \cdot 0 - 3 - 4 < 0$ è vera, quindi questo è il semipiano soluzione.

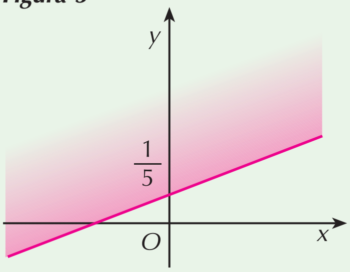
- Risolviamo graficamente la disequazione $2x - 5y + 1 \leq 0$

  Esplicitiamo rispetto ad y, ricordando che, dovendo dividere per un numero negativo, occorre cambiare il verso della disequazione: $y \geq \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$.

  Rappresentiamo nel piano cartesiano la retta origine del semipiano: $y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ (***figura 3***).

  Le soluzioni della disequazione sono i punti del semipiano che, a parità di ascissa, hanno un'ordinata maggiore o anche uguale a quella dei punti della retta; esse sono dunque rappresentate dai punti del semipiano in colore compresi quelli della sua origine.

Figura 3



ESERCIZI

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$x - 5y \geq 3$

Esplicitiamo la disequazione rispetto alla variabile y: $y \leq \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$

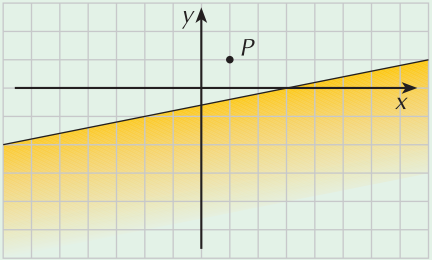
La retta associata alla disequazione è: $y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$

Disegniamo la retta e consideriamo per esempio il punto $P(1,\ 1)$.

Sostituiamo le coordinate di P nella disequazione:

$1 - 5 \geq 3 \qquad -4 \geq 3$

La disuguaglianza è falsa, il semipiano soluzione è quello cui non appartiene P, cioè quello in colore nella figura.



2 $\frac{2}{3}x + y + 1 \leq 0 \qquad x - \frac{1}{2}y - 2 \geq 0$

3 $x - 7 \leq 0 \qquad -y + x \leq 3$

4 $\frac{3}{5}x - y + 2 \geq 0 \qquad x + \frac{1}{4}y \leq \frac{1}{2}$

5 $2 \leq x + y \qquad -2 - \frac{3}{4}x \leq y$

6 $-y + \frac{3}{2} \geq 0 \qquad 2y + 4 \geq 0$

7 $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \leq 0 \qquad 0 \leq x + y + 1$

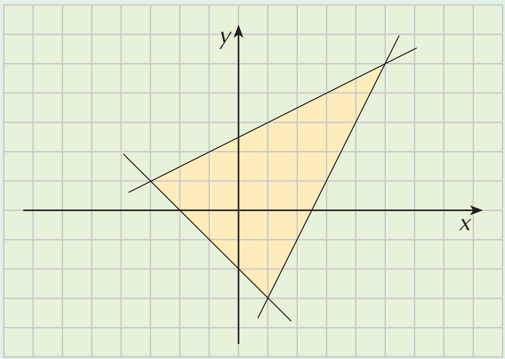
Risolvi graficamente i seguenti sistemi di disequazioni.

8 **ESERCIZIO GUIDATO**

$$\begin{cases} 2y - x - 5 \leq 0 \\ y + x + 2 \geq 0 \\ y - 2x + 5 \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema può essere riscritto in questo modo:

$$\begin{cases} y \leq \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} \\ y \geq -x - 2 \\ y \geq 2x - 5 \end{cases}$$



Il suo modello geometrico è rappresentato dall'intersezione dei semipiani associati a ciascuna disequazione.

9 $\begin{cases} 20x + y \leq 40 \\ 15x - 6y \geq -30 \\ x \geq 4 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x \geq 0 \\ 5y + 12x - 60 \leq 0 \\ 5y - 12x + 60 \geq 0 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 5y \leq -6x - 25 \\ 3y - 2x \leq -1 \\ y \geq -5 \end{cases}$

12 $\begin{cases} 2x + y \leq 40 \\ x + 3y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

13 $\begin{cases} y \geq 0 \\ 4y - 3x \leq 0 \\ 4y - 3x + 6 \leq 0 \\ 4y - 3x - 24 \geq 0 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2y + 3x \geq 0 \\ 5y \leq -x + 8 \\ 3y - 2x + 16 \geq 0 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3y - x - 3 \leq 0 \\ y + x \leq 1 \\ y - 3x + 3 \geq 0 \\ y + x \geq -3 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2y + x \leq 22 \\ y \geq 7x - 35 \\ 3y + 5x \geq 6 \\ y - 2 \leq 4x \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x \leq 3y + 18 \\ y \leq 2 - x \\ y \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 2y - x \leq -5 \\ 2y + 3x \geq -9 \\ 5y \geq 4x - 34 \\ x \leq -3y \end{cases}$

19 $\begin{cases} 5x - 2y - 10 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 8 \end{cases}$

20 $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - 3y - 6 \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 5 \end{cases}$

21 $\begin{cases} x \geq 2 \\ y + 3x - 1 > 0 \\ y \leq 0 \\ x - 8 < 0 \end{cases}$

22 $\begin{cases} y - x - 5 \leq 0 \\ x - 1 \leq 0 \\ y - 3x \geq 0 \\ 4y - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$

23 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y + 2x - 16 \geq 0 \\ 5y - 2x + 40 \geq 0 \\ y < 5 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$

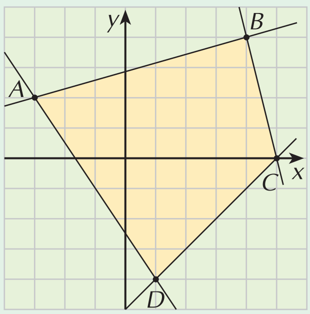
24 $\begin{cases} y \geq -2x \\ x \leq 3 \\ 2y \geq -4x - 5 \\ 4y + 8x - 5 \leq 0 \\ 8y - 20 \leq 5x \end{cases}$

25

ESERCIZIO GUIDATO

Determina il sistema di disequazioni che definisce il poligono di vertici $A(-3, 2)$, $B(4, 4)$, $C(5, 0)$, $D(1, -4)$.

- Il semipiano che delimita il poligono e che ha per origine la retta AB ha equazione $7y - 2x - 20 \leq 0$;
- il semipiano che ha per origine la retta BC ha equazione $y + 4x - 20 \leq 0$;
- il semipiano che ha per origine la retta CD ha equazione $y - x + 5 \geq 0$:
- infine il semipiano che ha per origine la retta AD ha equazione $2y + 3x + 5 \geq 0$.



Il sistema è quello che si ottiene considerando le disequazioni ottenute.

26 Determina il sistema di disequazioni che definisce il quadrilatero di vertici $A(0, 2)$, $B(2, 12)$, $C(9, 12)$, $D(4, 0)$.
$[y \leq 12 \;\wedge\; y - 5x - 2 \leq 0 \;\wedge\; 2y + x - 4 \geq 0 \;\wedge\; 5y - 12x + 48 \geq 0]$

27 Determina il sistema di disequazioni che definisce il quadrilatero di vertici $A(-3, 7)$, $B(5, 7)$, $C(10, -3)$, $D(-5, -3)$.
$[y \leq 7 \;\wedge\; y \geq -3 \;\wedge\; y \leq -2x + 17 \;\wedge\; y \leq 5x + 22]$

28 Determina il sistema di disequazioni che definisce il pentagono di vertici $A(0, 12)$, $B\left(-\frac{5}{2}, 8\right)$, $C(-3, 0)$, $D(0, -3)$, $E(8, 0)$.
$[5y \leq 8x + 60 \wedge 2y \leq -3x + 24 \wedge 8y \geq 3x - 24 \wedge y \geq -x - 3 \wedge y \leq 16x + 48]$

29 Determina il sistema di disequazioni che definisce il poligono di vertici $A(4, 0)$, $B(2, 4)$, $C(-1, 2)$, $D(-1, 0)$.
$[x \geq -1 \;\wedge\; y \geq 0 \;\wedge\; 3y - 2x - 8 \leq 0 \;\wedge\; y + 2x - 8 \leq 0]$