Attività di recupero

Cap 1. I RADICALI

Rivedi la teoria

La funzione potenza e i radicali in R_0^+

In algebra:

- elevando al quadrato (o a una potenza pari) due numeri opposti si ottiene lo stesso valore numerico:

$$(+3)^2 = 9 \quad \text{e} \quad (-3)^2 = 9 \qquad\qquad \left(+\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

- elevando al cubo (o ad una potenza dispari) due numeri opposti si ottengono ancora due numeri opposti:

$$(+2)^3 = +8 \quad \text{e} \quad (-2)^3 = -8 \qquad\qquad \left(+\frac{2}{3}\right)^3 = +\frac{8}{27} \quad \text{e} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$$

L'operazione inversa dell'elevamento a potenza è l'operazione di **estrazione di radice**. Affinché questa operazione possa però dare luogo sempre e comunque ad un solo risultato qualunque sia il valore dell'esponente, dobbiamo convenire di operare solo nell'ambito dei numeri positivi.
In questo modo:

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \qquad \sqrt[3]{27} = 3 \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Chiamiamo **radice *n*-esima** di un numero $a \geq 0$, e la indichiamo con il simbolo $\sqrt[n]{a}$, il numero $b \geq 0$ tale che $b^n = a$.
Al simbolo $\sqrt[n]{a}$ diamo il nome di **radicale**.
In esso:

- n è l'**indice della radice** che se è uguale a 2 si omette
- a è l'argomento del radicale e si chiama anche **radicando**.

La proprietà invariantiva e la semplificazione di un radicale in R_0^+

Si può passare da un radicale di indice n ad un radicale equivalente di indice np se si eleva a potenza p anche il radicando:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$$

In pratica basta moltiplicare indice della radice ed esponente del radicando per uno stesso fattore e il radicale che si ottiene ha lo stesso valore numerico di quello dato. Per esempio:

- $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[6]{5^4}$ i due radicali sono uguali perché abbiamo moltiplicato per 2 l'indice 3 e l'esponente 2
- $\sqrt[5]{7} = \sqrt[15]{7^3}$ i due radicali sono uguali perché abbiamo moltiplicato per 3 l'indice 5 e l'esponente 1

Se leggiamo da destra a sinistra la relazione individuata dalla proprietà invariantiva, possiamo dire che se l'indice della radice e l'esponente del radicando hanno un fattore comune, questo può essere semplificato.

Per esempio:

- $\sqrt[6]{7^3} = \sqrt{7}$ abbiamo diviso indice della radice ed esponente del radicando per 3
- $\sqrt[8]{4^5} = \sqrt[8]{2^{10}} = \sqrt[4]{2^5}$ abbiamo diviso indice della radice ed esponente del radicando per 2

Quando si esegue questa seconda operazione si dice che si **semplifica un radicale**. Un radicale che non si può semplificare si dice **irriducibile**; per esempio sono irriducibili i radicali $\sqrt[3]{2^4}$, $\sqrt{3^5}$.

Quando l'argomento di un radicale è letterale occorre stabilire qual è il suo dominio imponendo che il radicando sia positivo o nullo; per esempio:

- $\sqrt{x-4}$ esiste se $x-4 \geq 0$ cioè se $x \geq 4$
- $\sqrt[3]{xy}$ esiste se $xy \geq 0$ cioè se le variabili x e y sono entrambe positive o entrambe negative o una di esse o entrambe sono nulle

Quando si semplifica un radicale letterale è necessario che quello ottenuto dopo la semplificazione abbia lo stesso dominio del radicale dato; se questo non accade, si deve considerare il modulo di quei fattori che, in tale dominio, potrebbero essere negativi.
Per esempio semplificando il seguente radicale otteniamo

$$\sqrt[4]{\frac{1}{4}x^8y^2} = \sqrt[4]{\frac{1}{2^2}x^8y^2} = \sqrt{\frac{1}{2}x^4y}$$

Osserviamo adesso che:

- nel radicale di partenza x e y possono essere numeri sia positivi che negativi perché, essendo elevati a potenza pari, il radicando è comunque positivo o nullo
- nel radicale semplificato, x può continuare ad essere sia positivo che negativo perché è ancora elevato a potenza pari, mentre se y è negativo il radicale non esiste; dobbiamo allora considerare il modulo di y, quindi:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{4}x^8y^2} = \sqrt{\frac{1}{2}x^4|y|}$$

Fai gli esercizi

1 Completa le seguenti uguaglianze:

$\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[6]{\dots\dots}$ $\quad$ $\sqrt[5]{3^3} = \sqrt[10]{\dots\dots}$ $\quad$ $\sqrt[7]{5^3} = \sqrt[21]{\dots\dots}$

$\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[\dots]{2^9}$ $\quad$ $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[\dots]{5^6}$ $\quad$ $\sqrt[3]{4^2} = \sqrt[\dots]{4^{10}}$

2 Semplifica i seguenti radicali:

$\sqrt[10]{2^5}$ $\quad$ $\sqrt[8]{3^4}$ $\quad$ $\sqrt[9]{7^6}$

$\sqrt[12]{5^8}$ $\quad$ $\sqrt[4]{2^2 \cdot 5^8}$ $\quad$ $\sqrt[6]{3^4 \cdot 5^2}$

$\sqrt[4]{6^4 \cdot 3^2}$ $\quad$ $\sqrt[8]{2^{16} \cdot 3^4}$ $\quad$ $\sqrt[6]{216}$

3 Determina il dominio dei seguenti radicali:

a. $\sqrt[6]{2x-3}$ $\quad$ **b.** $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ $\quad$ **c.** $\sqrt[3]{b^2(a-1)}$ $\quad$ **d.** $\sqrt[3]{\dfrac{x^2y}{3a^4}}$

4 **ESERCIZIO GUIDA**

Semplifica i seguenti radicali:

- $\sqrt[8]{a^2-2ab+b^2}$

Scomponi il radicando: ....
Semplificando ottieni: ....
Nel radicale di partenza il radicando è un numero positivo o nullo qualunque sia il segno del binomio $(a-b)$; il radicale semplificato non esiste se $(a-b)$ è negativo, quindi ....

- $\sqrt[6]{8a^3b^6}$

Scrivi il coefficiente numerico sotto forma di potenza: ....
Semplifica il radicale: ....
Nel radicale di partenza b può essere sia positivo che negativo, a è invece un numero positivo perché altrimenti il radicale non esisterebbe; nel radicale semplificato a continua ad essere un numero positivo, e anche b^2 è un numero positivo. Quindi ....

5 Semplifica i seguenti radicali:

a. $\sqrt[9]{\dfrac{x^3}{27y^6}}$ **b.** $\sqrt[8]{\dfrac{25a^2b^4}{y^{16}}}$ **c.** $\sqrt[3]{y^3+1+3y^2+3y}$ **d.** $\sqrt{y^2+2y+1}$

e. $\sqrt[9]{\dfrac{1}{27}(x+2y)^3}$ **f.** $\sqrt[4]{\dfrac{x^2-6x+9}{4y^4}}$ **g.** $\sqrt[6]{\dfrac{x^8y^3}{(x-y)^9}}$ **h.** $\sqrt[8]{\dfrac{a^3+27}{a+3}+9a}$

Rivedi la teoria

La moltiplicazione e la divisione di radicali

Queste operazioni si possono eseguire solo se i radicali hanno lo stesso indice. In questo caso il prodotto o il quoziente è un radicale che ha lo stesso indice e per radicando il prodotto o il quoziente fra i radicandi. Per esempio:

- $\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5\cdot 3}=\sqrt{15}$
- $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{18}=\sqrt[3]{12\cdot 18}=\sqrt[3]{(2^2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3^2)}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}=\sqrt[3]{6^3}=6$
- $\sqrt{45}:\sqrt{15}=\sqrt{\dfrac{45}{15}}=\sqrt{3}$

Se i radicali non hanno lo stesso indice, occorre prima ricondurli in questa situazione applicando la proprietà invariantiva; per esempio, riduciamo i seguenti radicali allo stesso indice:

- $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{6}$; $\sqrt[4]{2}$

l'indice comune è il *m.c.m.* fra gli indici delle tre radici, cioè nel nostro caso 12; quindi

$$\sqrt{5}=\sqrt[12]{5^6} \qquad \sqrt[3]{6}=\sqrt[12]{6^4} \qquad \sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^3}$$

Una volta ricondotti i radicali allo stesso indice si può poi calcolare il loro prodotto o quoziente; per esempio:

- $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{6}:\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{\dfrac{5^6\cdot 6^4}{2^3}}=\sqrt[12]{\dfrac{5^6\cdot 2^4\cdot 3^4}{2^3}}=\sqrt[12]{5^6\cdot 2\cdot 3^4}$

In modo analogo calcoliamo i seguenti prodotti e quozienti:

- $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{8^3 \cdot 5^4} = \sqrt[12]{2^9 \cdot 5^4}$
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 4^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^4} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{128}$
- $\sqrt{8} : \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{\dfrac{8^3}{4^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^9}{2^4}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$

Portare un fattore esterno dentro un radicale

Un **fattore esterno positivo** può essere trasportato all'interno del simbolo di radice elevandolo ad una potenza uguale all'indice del radicale. Per esempio:

- $\dfrac{3}{4} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \cdot \dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{3}{8}}$

Un **fattore esterno negativo** può essere trasportato all'interno del simbolo di radice in questo modo:

- si eleva ad una potenza uguale all'indice del radicale il valore assoluto del numero
- si lascia il segno meno all'esterno del radicale.

Per esempio:

- $-\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4}{5}} = -\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 \cdot \dfrac{4}{5}} = -\sqrt[3]{\dfrac{1}{10}}$

Se del fattore esterno non si conosce il segno, occorre distinguere il caso in cui è positivo da quello in cui è negativo; per esempio:

- $x \cdot \sqrt{\dfrac{a}{x}}$: sappiamo che $\dfrac{a}{x}$ è positivo o nullo, ma non conosciamo il segno di x, quindi dobbiamo distinguere due casi:
  - se $x > 0$ allora $x \cdot \sqrt{\dfrac{a}{x}} = \sqrt{\dfrac{ax^2}{x}} = \sqrt{ax}$
  - se $x < 0$ allora $x \cdot \sqrt{\dfrac{a}{x}} = -\sqrt{\dfrac{a(-x)^2}{x}} = -\sqrt{ax}$

Attenzione. Si sta parlando di *fattori*, quindi di numeri che sono moltiplicati per un radicale; non è quindi possibile portare all'interno di un simbolo di radice un numero che è addizionato al radicale: nell'espressione $3 + \sqrt{2}$ il termine 3 non si può portare all'interno della radice quadrata.

Portare un fattore interno fuori da un radicale

Se all'interno di un radicale uno dei fattori del radicando ha un esponente che è maggiore o uguale dell'indice della radice, si può eseguire l'operazione inversa della precedente e trasportare quel fattore al di fuori della radice seguendo una semplice regola:

$\sqrt[n]{a^m}$ se $m \geq n$ e se $m : n$ ha quoziente q e resto r, allora $\sqrt[n]{a^m} = a^q \cdot \sqrt[n]{a^r}$

Se il fattore che si porta fuori dalla radice è letterale occorre mettere il modulo nei casi in cui non è garantito che il radicale ottenuto abbia lo stesso segno di quello dato.

Per esempio:

- $\sqrt{60} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2\sqrt{15}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{8}{25}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3}{5^2}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}$

- $\sqrt{\frac{x^5y^3}{a^2}} = \frac{x^2y}{a}\sqrt{xy}$

 e poiché sappiamo che xy è positivo, ma non sappiamo nulla su ogni singola lettera, dovremo scrivere

$$\sqrt{\frac{x^5y^3}{a^2}} = x^2\left|\frac{y}{a}\right|\sqrt{xy}$$

Attenzione. Anche in questo caso si sta parlando di *fattori*, non è quindi possibile portare al di fuori di un simbolo di radice un numero che, all'interno della radice, è addizionato ad altri numeri: nell'espressione $\sqrt{a^2+3}$ il termine a^2 non si può portare all'esterno della radice quadrata.

Elevare a potenza un radicale

Per **elevare a potenza** un radicale aritmetico, si eleva a quella potenza il radicando; per esempio:

- $\left(\sqrt[5]{3xy}\right)^2 = \sqrt[5]{(3xy)^2} = \sqrt[5]{9x^2y^2}$
- $\left(\sqrt{2a^2b}\right)^3 = \sqrt{(2a^2b)^3} = \sqrt{8a^6b^3}$
- $\left(\sqrt[4]{5ab}\right)^2 = \sqrt[4]{(5ab)^2} = \sqrt[2]{5ab}$

Osserviamo con attenzione l'ultimo esempio: l'indice della radice e l'esponente della potenza sono entrambi divisibili per 2; il calcolo della potenza può anche essere fatto in modo più rapido semplificando questi due numeri. Per esempio:

- $\left(\sqrt[6]{3x^2}\right)^2 = \sqrt[3]{3x^2}$
- $\left(\sqrt[8]{a^2x}\right)^4 = \sqrt{a^2x}$

La radice di un radicale

Per **estrarre la radice *m*-esima** di un radicale di indice n, basta considerare la radice di indice $m \cdot n$, vale cioè l'uguaglianza $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$; per esempio:

- $\sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$
- $\sqrt{\sqrt[3]{64a^6}} = \sqrt[6]{64a^6} = 2|a|$

Se la radice più interna è moltiplicata per un fattore ad essa esterno, occorre prima trasportare sotto il simbolo di radice tale fattore; per esempio:

- $\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{2^2}{2}}} = \sqrt[4]{2}$
- $\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^6 \cdot \frac{1}{a^2}}} = \sqrt[9]{a^4}$

Fai gli esercizi

Esegui le seguenti operazioni.

6 **a.** $\sqrt{\frac{21}{10}} \cdot \sqrt{\frac{5}{14}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}}$ **b.** $\sqrt{\frac{8}{9}} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{10}}$

7 **a.** $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \sqrt{x^2-1}$ **b.** $\sqrt{a+3} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2-9}} : \sqrt{a-3}$

8 **a.** $\left(\sqrt{a-1} \cdot \sqrt{\frac{a-2}{a^2-1}}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{a+1}{a-2}}$ **b.** $\sqrt{\frac{2x^2-5x-3}{2x^2-7x+3}} : \sqrt{\frac{2x+1}{2x^2+x-1}}$

Porta sotto il simbolo di radice i fattori esterni.

9 $4\sqrt[3]{2}$ $\quad -2\sqrt[4]{5}$ $\quad -\frac{1}{2}\sqrt{8}$ $\quad \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$

10 $a \cdot \sqrt[3]{b}$ $\quad x \cdot \sqrt[3]{3y^2}$ $\quad x \cdot \sqrt{y}$ $\quad a^3 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{a^3}}$

11 $(x-1)\sqrt{6(x-1)}$ $\quad (x-2)\sqrt{3x}$ $\quad (x+1)\sqrt{(x^2+1)}$ $\quad (x-3)\sqrt[4]{\frac{1}{(x-3)^3}}$

Porta fuori dal simbolo di radice.

12 **ESERCIZIO GUIDA**

a. $\sqrt{8x^3y^2} = 2xy\sqrt{2x}$ sai che x è positivo o nullo, mentre non conosci il segno di y, quindi devi considerare il modulo di ....

b. $\sqrt{16a^5b^4} = \sqrt{2^4a^5b^4} = \dots\dots\dots$

13 **a.** $\sqrt[3]{a^5b^2}$ **b.** $\sqrt[4]{64x^5(x+y)^4}$ **c.** $\sqrt{\frac{8}{27}x^3}$ **d.** $\sqrt[5]{\frac{64a^7}{729}}$

14 **a.** $\sqrt[3]{\frac{64}{25}x^6}$ **b.** $\sqrt{(2x+1)^3}$ **c.** $\sqrt[3]{\frac{a^4xy}{8}}$ **d.** $\sqrt[6]{\frac{x^7(2x-1)^8}{64}}$

Calcola.

15 **a.** $\left(3\sqrt{2}\right)^3$ **b.** $\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{2}\right)^2$ **c.** $\left(y \cdot \sqrt{\frac{1}{y}}\right)^5$

16 **a.** $\left(2\sqrt[4]{5}\right)^2$ **b.** $\left(\sqrt[3]{7}\right)^6$ **c.** $\left(x\sqrt[4]{x^3}\right)^2$

17 **a.** $\sqrt{\sqrt{x^3}}$ **b.** $\frac{1}{3}\sqrt[4]{x \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}}$ **c.** $\sqrt{\frac{x-1}{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{x-1}}}$

Rivedi la teoria

I radicali simili e la somma

Due radicali che differiscono solo per un eventuale fattore esterno, mentre l'indice della radice ed il radicando sono uguali, si dicono **simili**. Sono ad esempio simili i radicali

$$\sqrt{2} \quad \text{e} \quad -3\sqrt{2}, \qquad\qquad 6\sqrt[3]{5} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\sqrt[3]{5}.$$

Si possono **calcolare la somma e la differenza di due o più radicali** solo se questi sono simili. Per esempio:

- $\sqrt[3]{5} + 8\sqrt[3]{5} - 10\sqrt[3]{5} = (1+8-10)\sqrt[3]{5} = -\sqrt[3]{5}$
- $-2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = (-2+4-1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

Alcuni radicali che apparentemente non sembrano simili possono diventarlo quando si portano fuori dal simbolo di radice tutti i possibili fattori; per esempio:

- $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 2^2} - \sqrt{3^3} + \sqrt{3 \cdot 5^2} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

La razionalizzazione

Razionalizzare il denominatore di una frazione significa scriverne una ad essa equivalente che ha il denominatore privo di radicali. Per eseguire l'operazione di razionalizzazione si deve applicare la proprietà invariantiva della divisione e moltiplicare quindi numeratore e denominatore della frazione per un opportuno **fattore razionalizzante**. Per esempio:

- $\frac{1}{\sqrt{5}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt{5}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt[3]{2^2}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
- $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ il fattore razionalizzante è $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; in questo modo si ottiene al denominatore una differenza di quadrati che elimina i due radicali

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2} = 2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$$

I radicali doppi

Si chiama **radicale quadratico doppio** un radicale che assume la forma $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$; quando il binomio $a^2 - b$ è un quadrato perfetto, il radicale doppio può essere trasformato nella somma o nella differenza di due radicali semplici in uno dei seguenti modi:

- individuando nell'espressione $a \pm \sqrt{b}$ un quadrato perfetto
- applicando la formula $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

Per esempio, il radicale doppio $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ si può trasformare nei seguenti modi:

- riconoscendo un quadrato: $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3+1-2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \sqrt{3}-1$

Attenzione. Anche se $\left(\sqrt{3}-1\right)^2 = \left(1-\sqrt{3}\right)^2$

sarebbe sbagliato scrivere $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2} = 1-\sqrt{3}$

perché $1-\sqrt{3}$ è un numero negativo, mentre $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ è positivo.

- applicando la formula: $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{12}}$ essendo $a^2 - b = 16 - 12 = 4 = 2^2$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4+2}{2}} - \sqrt{\frac{4-2}{2}} = \sqrt{3}-1$$

Fai gli esercizi

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

18 $\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{4} - \frac{5}{4}\sqrt[3]{4}$

19 $3\sqrt{7} - 2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt[3]{2} - 5\sqrt{7}$

20 $\sqrt{54} - \sqrt{32} - \sqrt{150} + \sqrt{18}$

21 $\left(\sqrt{3}-2\right)^2 + \left(2\sqrt{3}+1\right)^2$

22 $\sqrt{72}-\sqrt{32}+2\left(\sqrt{8}-3\sqrt{2}\right)+5\sqrt{18}$

23 $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^3-\left(2\sqrt[3]{2}+1\right)^3+3\left(\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{4}\right)$

24 $1-\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{15}-2\right)^2-6\left(2+\sqrt{15}\right)$

25 $\left(\sqrt[3]{2}-2\right)^3-6\left(2\sqrt[3]{2}+1\right)+\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^2+5\sqrt[3]{4}$

Razionalizza il denominatore delle seguenti frazioni.

26 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \dfrac{3}{\sqrt{6}}$ $\qquad \dfrac{12\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$ $\qquad \dfrac{2}{\sqrt{12}}$

27 $\dfrac{2a}{\sqrt{a}}$ $\qquad \dfrac{9x}{\sqrt{3x}}$ $\qquad \dfrac{2a}{\sqrt[4]{a^3b}}$ $\qquad \dfrac{a}{\sqrt{ab}}$

28 $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ $\qquad \dfrac{14}{3-\sqrt{2}}$ $\qquad \dfrac{4}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$ $\qquad \dfrac{7}{\sqrt{2}-4}$

29 $\dfrac{a}{\sqrt{a}-1}$ $\qquad \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ $\qquad \dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ $\qquad \dfrac{x}{x+\sqrt{x}}$

Trasforma i seguenti radicali doppi nella somma di radicali semplici.

30 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ $\qquad \sqrt{19-8\sqrt{3}}$ $\qquad \sqrt{9-\sqrt{80}}$

31 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $\qquad \sqrt{5+2\sqrt{6}}$ $\qquad \sqrt{\dfrac{9}{4}+\sqrt{2}}$

Rivedi la teoria

I radicali in *R*

Con i radicali in R_0^+ si possono calcolare solo le radici dei numeri positivi o nulli. Il concetto di radice si può però estendere anche ai numeri negativi quando l'indice della radice è dispari, mentre non è ancora possibile calcolare le radici di indice pari dei numeri negativi:

$$\sqrt[3]{-8}=-2 \qquad \text{ma} \qquad \sqrt{-4} \text{ non esiste}$$

In generale, la radice *n*-esima con *n* dispari di un numero *a* (di solito $n=3$) si calcola nel seguente modo:

- se *a* è positivo la sua radice *n*-esima coincide con il radicale aritmetico $\sqrt[n]{a}$; per esempio:

$$\sqrt[3]{27}=3 \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$$

- se *a* è negativo la sua radice *n*-esima si calcola in pratica trasportando il segno "meno" al di fuori della radice perché, qualunque sia *a*, vale la relazione $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$; per esempio:

$$\sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{125}=-5 \qquad \sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=-\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3}$$

Le potenze ad esponente razionale

Le potenze che hanno come esponente un numero razionale scritto sotto forma di frazione possono essere interpretate come radicali mediante la seguente relazione

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

Per esempio: $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5} \qquad 2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^5}$

Fai gli esercizi

Calcola, se possibile, i seguenti radicali in R e semplifica le espressioni.

32 $\sqrt{-8}$ $\quad \sqrt{\dfrac{4}{9}}$ $\quad \sqrt[3]{-\dfrac{8}{3}}$ $\quad \sqrt[3]{\dfrac{5}{27}}$

33 $\sqrt{20}+\sqrt{12}+\left(\sqrt[3]{-16}+2\sqrt[3]{3}\right)-\left(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{-3}+2\sqrt{5}\right)$

Esegui le seguenti operazioni trasformando il risultato in forma di radicale.

34 **a.** $2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}:2^{\frac{1}{6}}$ **b.** $\left(5^{\frac{3}{2}}:5^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(5^{\frac{2}{3}}:5^{\frac{1}{3}}\right)$

35 **a.** $3^{-\frac{5}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}:3^{\frac{1}{4}}$ **b.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{7}{2}}:\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\right]^{-2}$

36 **a.** $\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}}:\left(3^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)$ **b.** $\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}-1$

Risultati di alcuni esercizi.

1 $\sqrt[6]{2^4}$; $\sqrt[10]{3^6}$; $\sqrt[21]{5^9}$; $\sqrt[12]{2^9}$; $\sqrt[9]{5^6}$; $\sqrt[15]{4^{10}}$

2 $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{49}$; $\sqrt[3]{25}$; $\sqrt{1\,250}$; $\sqrt[3]{45}$; $\sqrt{108}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{6}$

3 **a.** $x\geq\dfrac{3}{2}$; **b.** $x\leq 0 \vee x>1$; **c.** $a\geq 1$; **d.** $y\geq 0 \wedge a\neq 0$

4 $\sqrt[4]{|a-b|}$; $\sqrt{2ab^2}$

5 **a.** $\sqrt[3]{\dfrac{x}{3y^2}}$; **b.** $\sqrt[4]{\dfrac{5|a|b^2}{y^8}}$; **c.** $y+1$; **d.** $|y+1|$; **e.** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}(x+2y)}$; **f.** $\sqrt{\dfrac{|x-3|}{2y^2}}$; **g.** $\sqrt[6]{\dfrac{x^8y^3}{(x-y)^9}}$; **h.** $\sqrt[4]{|a+3|}$

6 1; $\sqrt{2}$

7 $|x+1|$; $\dfrac{1}{|a-3|}$

8 **a.** $\sqrt{\dfrac{a-2}{a+1}}$; **b.** $\sqrt{x+1}$

9 $\sqrt[3]{2^7}$; $-\sqrt[4]{80}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{\dfrac{3}{32}}$

10 $a\geq 0:\sqrt[3]{a^3b} \vee a<0:-\sqrt[3]{-a^3b}$; $x\geq 0:\sqrt[3]{3x^3y^2} \vee x<0:-\sqrt[3]{-3x^3y^2}$;
$x\geq 0:\sqrt{x^2y} \vee x<0:-\sqrt{x^2y}$; $\sqrt[4]{a^9}$

11 $\sqrt{6(x-1)^3}$; $x\geq 2:\sqrt{3x(x-2)^2} \vee 0\leq x<2:-\sqrt{3x(x-2)^2}$;
$x\geq -1:\sqrt{(x+1)^2(x^2+1)} \vee x<-1:-\sqrt{(x+1)^2(x^2+1)}$; $\sqrt[4]{x-3}$

12 **a.** $2x|y|\sqrt{2x}$; **b.** $4a^2b^2\sqrt{a}$

13 **a.** $a\sqrt[3]{a^2b^2}$; **b.** $2x|x+y|\sqrt[4]{4x}$; **c.** $\dfrac{2}{3}x\sqrt{\dfrac{2}{3}x}$; **d.** $\dfrac{2}{3}a\sqrt[5]{\dfrac{2}{3}a^2}$

14 **a.** $4x^2\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}$; **b.** $(2x+1)\sqrt{2x+1}$; **c.** $\dfrac{|a|}{2}\sqrt[3]{|a|xy}$; **d.** $\dfrac{x|2x-1|}{2}\sqrt[6]{x(2x-1)^2}$

15 **a.** $54\sqrt{2}$; **b.** $\dfrac{1}{9}\sqrt{2}$; **c.** $y^2\sqrt{y}$

16 $4\sqrt{5}$; 49; $x^3\sqrt{x}$

17 **a.** $\sqrt[4]{x^3}$; **b.** $\dfrac{1}{3}\sqrt[8]{x}$; **c.** $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{a}}$

18 $\dfrac{9}{4}\sqrt[3]{4}$

19 $-5\sqrt[3]{2}$

20 $-2\sqrt{6}-\sqrt{2}$

21 20

22 $15\sqrt{2}$

23 -16

24 $-8\sqrt{15}$

25 $-\left(11+2\sqrt[3]{2}\right)$

26 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$; $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$; $\dfrac{6\sqrt{15}}{5}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

27 $2\sqrt{a}$; $3\sqrt{3x}$; $\dfrac{2\sqrt[4]{ab^3}}{b}$; $\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$

28 $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$; $2(3+\sqrt{2})$; $2(2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4})$; $-\dfrac{\sqrt{2}+4}{2}$

29 $\dfrac{a(\sqrt{a}+1)}{a-1}$; $\sqrt{x}-\sqrt{y}$; $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$; $\dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}$

30 $\sqrt{2}+1$; $4-\sqrt{3}$; $\sqrt{5}-2$

31 $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$

32 non esiste, $\dfrac{2}{3}$, $-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$, $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{3}$

32 $2\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2}$

34 **a.** $\sqrt[3]{4}$; **b.** $5\sqrt[3]{5}$

35 **a.** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{5}{4}}$; **b.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{21}{2}}$

36 **a.** $\sqrt[3]{3}$; **b.** 0

Cap 2. LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Rivedi la teoria

Le equazioni incomplete

Un'equazione di secondo grado si può sempre scrivere nella sua **forma normale** $ax^2+bx+c=0$.
In essa il coefficiente a non può essere nullo, altrimenti l'equazione diventa lineare, ma possono mancare il termine noto se $c=0$ o il termine di primo grado se $b=0$. In questi casi l'equazione si risolve applicando concetti e metodi già noti; in particolare:

- se l'equazione ha la forma $ax^2+c=0$, cioè manca il termine di primo grado, le sue soluzioni sono:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad \text{se} \qquad -\frac{c}{a}\geq 0$$

L'equazione non ha invece soluzioni reali se $-\dfrac{c}{a}<0$.

Per esempio:

- $4x^2-9=0$ $\quad x^2=\dfrac{9}{4}$ $\quad x=\pm\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\pm\dfrac{3}{2}$
- $5x^2+1=0$ $\quad x^2=-\dfrac{1}{5}$ $\quad$ l'equazione non ha soluzioni reali

- Se l'equazione ha la forma $ax^2+bx=0$, cioè manca il termine noto, basta raccogliere x a fattor comune ed applicare la legge di annullamento del prodotto.

Per esempio:

- $6x^2+5x=0$ $\quad x(6x+5)=0$ $\quad x=0 \ \vee \ x=-\dfrac{5}{6}$
- $4x^2-9x=0$ $\quad x(4x-9)=0$ $\quad x=0 \ \vee \ x=\dfrac{9}{4}$

- Se l'equazione ha la forma $ax^2=0$, cioè mancano sia il termine noto che quello di primo grado, l'unica soluzione è $x=0$.

Per esempio:

- $3x^2=0 \quad \rightarrow \quad x=0$
- $-\dfrac{7}{2}x^2=0 \quad \rightarrow \quad x=0$

L'equazione completa

Quando l'equazione è completa, cioè è nella forma $ax^2 + bx + c = 0$, le soluzioni si ottengono applicando la formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

in cui l'espressione $b^2 - 4ac$ si chiama **discriminante** e si indica con il simbolo Δ.

Per esempio:

- nell'equazione $3x^2 - 5x - 2 = 0$ è $a = 3$, $b = -5$, $c = -2$, quindi le soluzioni sono

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ 2 \end{cases}$$

- nell'equazione $2x^2 + x - 3 = 0$ è $a = 2$, $b = 1$, $c = -3$, quindi le soluzioni sono

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

La formula si può applicare anche nel caso di un'equazione non completa, ma i metodi precedenti sono più veloci.

Le soluzioni di un'equazione di secondo grado dipendono dal valore del discriminante; in particolare:

- se $\Delta > 0$, le soluzioni dell'equazione sono numeri reali e distinti
- se $\Delta = 0$, le soluzioni sono numeri reali coincidenti
- se $\Delta < 0$, le soluzioni non sono numeri reali.

La formula ridotta

Se il coefficiente b dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ è pari, per determinare le soluzioni conviene usare la **formula ridotta**:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

Per esempio, nell'equazione $3x^2 + 8x + 4 = 0$ è $b = 8$, quindi $\frac{b}{2} = 4$; applicando la formula ridotta otteniamo:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 3 \cdot 4}}{3} = \frac{-4 \pm 2}{3} = \begin{cases} -2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Fai gli esercizi

Risolvi le seguenti equazioni incomplete.

1 **a.** $4x^2 - 25 = 0$ **b.** $5x^2 + x = 0$

2 **a.** $-3x^2 + 2x = 0$ **b.** $\frac{3}{4}x^2 = 0$

3 **a.** $4x - \frac{3}{4}x^2 = 0$ **b.** $-\frac{1}{2}x^2 = 0$

4 a. $\frac{1}{16}x^2+9=0$ b. $36x^2+1=0$

Risolvi le seguenti equazioni applicando la formula risolutiva.

5 a. $2x^2+3x-5=0$ b. $4x^2-4x-3=0$

6 a. $x^2+3x+8=0$ b. $4x^2-12x+9=0$

7 a. $\frac{2x^2+1-3x}{7}=\frac{2x-1}{2}-\frac{6}{7}$ b. $\frac{x}{3}\left(1-\frac{1}{2}x\right)+\frac{1+x}{2}=\frac{2+x^2}{2}-\frac{x}{3}$

8 a. $\frac{x(2-x)+2}{2}=\frac{x}{2}+\frac{7+4x^2+13x}{4}$ b. $\frac{x^2+4}{4}-\frac{5}{12}+\frac{x-1}{3}=\frac{7}{12}$

Risolvi applicando la formula ridotta.

9 a. $x^2+6x-7=0$ b. $x^2+2x-1=0$

10 a. $3x^2-6x+1=0$ b. $5x^2-2x-3=0$

11 a. $\frac{x^2}{2}+\frac{x-2}{3}-\frac{1}{6}=0$ b. $\frac{16(x^2-2x)}{7}+1=0$

12 $(x-2)^2+\frac{(4-x)^2}{10}=x^2-4x+5-\frac{(1-2x)^2}{10}$

Risolvi le seguenti equazioni frazionarie.

13 **ESERCIZIO GUIDA**

$\frac{1}{x-1}+5=\frac{3}{x+1}$

L'equazione è frazionaria, deve quindi essere $x\neq 1 \ \wedge \ x\neq -1$; si ha allora che $D=$ ....

Liberando l'equazione dai denominatori e svolgendo i calcoli trovi l'equazione

$$5x^2-2x-1=0$$

le cui soluzioni sono ....

Poiché tali soluzioni appartengono al dominio, $S=$ ....

14 $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{3-5x}{x^2-3x+2}$

(Attenzione: delle soluzioni trovate una non appartiene al dominio, quindi ....)

15 $\frac{x-2}{2x+3}-\frac{7}{4x^2-9}=\frac{1}{3-2x}$

16 $\frac{5x}{x^2+6x+9}=\frac{6}{x^2+4x+3}-\frac{1}{x+3}$

17 $\frac{x(2x+3)}{x^2-1}+\frac{2x+3}{x+1}=\frac{8}{3(x+1)}$

18 $\frac{2(x+1)}{x+2}-\frac{x+2}{2x-1}=\frac{5x+7}{2x^2+3x-2}-\frac{13}{5(x+2)}$

Rivedi la teoria

Le equazioni letterali

Quando un'equazione è letterale, bisogna cercare di capire che cosa succede alle sue soluzioni al variare del parametro.

In generale, una volta scritta l'equazione nella forma tipica $ax^2 + bx + c = 0$ si deve analizzare il coefficiente a di x^2:

- se $a \neq 0$ si può applicare la formula risolutiva
- se $a = 0$ la formula non si può applicare, ma l'equazione diventa di primo grado e si possono trovare le sue soluzioni.

Vediamo come si procede nella discussione risolvendo l'equazione

$$ax(x+2) + 1 - a = a(x+2) - (a - x)$$

Svolgendo i calcoli otteniamo: $ax^2 + 2ax + 1 - a = ax + 2a - a + x$

$$ax^2 + ax - x + 1 - 2a = 0$$

Visto che ci sono due termini in x, raccogliamo a fattor comune: $ax^2 + (a-1)x + 1 - 2a = 0$

Per poter applicare la formula risolutiva il coefficiente di x^2 deve essere diverso da zero, quindi abbiamo due possibilità:

- se $a \neq 0$ applichiamo la formula risolutiva.

  Calcoliamo il discriminante dell'equazione:

  $\Delta = (a-1)^2 - 4a(1-2a) = a^2 - 2a + 1 - 4a + 8a^2 = 9a^2 - 6a + 1 = (3a-1)^2$

  Calcoliamo i valori di x: $x = \dfrac{1 - a \pm (3a-1)}{2a} =$

  $$\dfrac{1 - a - 3a + 1}{2a} = \dfrac{2 - 4a}{2a} = \dfrac{1 - 2a}{a}$$

  $$\dfrac{1 - a + 3a - 1}{2a} = \dfrac{2a}{2a} = 1$$

- se $a = 0$ non possiamo applicare la formula risolutiva; se sostituiamo 0 al posto di a nell'equazione otteniamo:

  $-x + 1 = 0$ da cui $x = 1$

In definitiva: se $a \neq 0$ allora $S = \left\{1, \dfrac{1-2a}{a}\right\}$

se $a = 0$ allora $S = \{1\}$.

Fai gli esercizi

Risolvi e discuti le seguenti equazioni.

19 $\dfrac{x^2 + a^2}{2} - a^2 = a(a - x)$

20 $(2a-1)x^2 - 2ax = -1$

21 **ESERCIZIO GUIDA**

$\dfrac{x(ax+1)}{3a} = 3a^2 + 1$

Per l'esistenza dell'equazione deve essere $a \neq$ ....

Svolgendo i calcoli ottieni l'equazione in forma normale $ax^2 + x - (9a^3 + 3a) = 0$

Poiché stai già lavorando nell'ipotesi in cui $a \neq 0$, puoi applicare la formula risolutiva senza porre ulteriori condizioni sul parametro:

il discriminante è ....

applicando la formula ottieni ....

22 $x(x + 2a) = -\dfrac{2(2a + x)}{a}$

23 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo in R l'equazione letterale frazionaria $2(a - 1) - \dfrac{2(a - 2)}{x} = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

Il dominio dell'equazione è $D = R - \{0\}$.

Liberiamo l'equazione dai denominatori e svolgiamo i calcoli: $2x(a - 1) - 2(a - 2) = x^2 + 1 \rightarrow$

$\rightarrow \quad 2ax - 2x - 2a + 4 - x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2(a - 1)x + 2a - 3 = 0$

Il coefficiente di x^2 non è mai nullo, il coefficiente di x è pari, quindi possiamo applicare la formula risolutiva ridotta:

$$\frac{\Delta}{4} = (a - 1)^2 - (2a - 3) = a^2 - 2a + 1 - 2a + 3 = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$$

$$x = a - 1 \pm (a - 2) = \begin{cases} 1 \\ 2a - 3 \end{cases}$$

Adesso dobbiamo confrontare le soluzioni trovate con i valori che avevamo escluso dal dominio:

- la prima soluzione è accettabile perché non è uguale a 0
- la seconda soluzione è accettabile se $2a - 3 \neq 0$, cioè se $a \neq \dfrac{3}{2}$.

In definitiva: se $a \neq \dfrac{3}{2}$: $S = \{2a - 3, 1\}$

se $a = \dfrac{3}{2}$: $S = \{1\}$.

24 $\dfrac{2ax(2a + x)}{2a - x} = 6a^2$

25 $\dfrac{4x}{a} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2(a + 1)}{a}$

Rivedi la teoria

I legami fra coefficienti e soluzioni

Ricordiamo che fra le soluzioni x_1 e x_2 di un'equazione di secondo grado ed i coefficienti a, b, c sussistono le seguenti relazioni:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{e} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Per esempio, data l'equazione $12x^2 - 8x + 1 = 0$ si ha che:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-8}{12} = \frac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{12}$$

Posto $s = x_1 + x_2$ e $p = x_1 \cdot x_2$, l'equazione può essere scritta nella forma $x^2 - sx + p = 0$.

Queste relazioni ci permettono di:

- determinare rapidamente, in alcuni casi, le soluzioni di un'equazione senza applicare la formula risolutiva.

  Per esempio, dell'equazione $x^2 - 2x - 8 = 0$ sappiamo che $x_1 + x_2 = 2$ e $x_1 \cdot x_2 = -8$; quindi i due numeri il cui prodotto è -8 e la cui somma è 2 sono $+4$ e -2. Quindi $S = \{-2, 4\}$.

- individuare due numeri conoscendo la loro somma s ed il loro prodotto p.

  Per esempio, se $s = \frac{2}{3}$ e $p = -\frac{5}{3}$ per trovare i due numeri possiamo risolvere l'equazione $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$; ricaviamo così che i due numeri sono -1 e $\frac{5}{3}$.

- scrivere l'equazione che ha come soluzioni due numeri assegnati.

  Per esempio, l'equazione che ha come soluzioni $x_1 = -3$ e $x_2 = 7$, tenendo presente che

  $x_1 + x_2 = -3 + 7 = 4 \qquad x_1 \cdot x_2 = -3 \cdot 7 = -21 \qquad$ è $\quad x^2 - 4x - 21 = 0$.

- scomporre in fattori un trinomio di secondo grado; vale infatti la relazione

  $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

  essendo x_1 e x_2 le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

  Per esempio, scomponiamo il trinomio $2x^2 + 5x - 3$:

  - risolviamo l'equazione $2x^2 + 5x - 3 = 0 \qquad x = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} -3 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$
  - applichiamo la formula tenendo presente che è $a = 2$:

    $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3) = (2x - 1)(x + 3)$

Fai gli esercizi

26 Senza applicare la formula risolutiva, trova le soluzioni delle equazioni:

a. $x^2 - 2x - 63 = 0$; **b.** $x^2 - 12x + 35 = 0$

27 Determina due numeri sapendo che:

a. la somma è 6 e il prodotto è -16

b. la somma è -2 e il prodotto è -8

c. la somma è 2 e il prodotto è -1

28 Scrivi l'equazione che ha come soluzione i numeri:

a. $-\frac{3}{2}$ e -5 **b.** $\frac{1}{4}$ e 2 **c.** $-\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ **d.** $\frac{4}{3}$ e $-\frac{5}{2}$

29 Scomponi in fattori i seguenti trinomi di secondo grado:

a. $3x^2 - 2x - 5$ **b.** $-15x^2 + 13x - 2$ **c.** $5x^2 - 9x - 2$ **d.** $6x^2 + 13x + 6$

30 **ESERCIZIO GUIDA**

Nell'equazione parametrica $x^2 - (k+3)x - k + 5 = 0$, vogliamo determinare il valore del parametro k in modo che le radici siano reali e che:

a. una soluzione sia nulla
b. le radici siano coincidenti
c. una delle radici sia l'opposto dell'altra
d. una radice sia l'inverso dell'altra.

a. Sostituisci 0 nell'equazione al posto di x; ottieni che deve essere $k =$ ....

b. Le soluzioni di un'equazione di secondo grado sono coincidenti se il discriminante vale zero, quindi ....

c. Se $x_1 = -x_2$, allora $x_1 + x_2 = 0$; applicando la relazione sulla somma delle soluzioni trovi l'equazione ....,   da cui ricavi che ....

d. Se $x_1 = \dfrac{1}{x_2}$, allora $x_1 \cdot x_2 = 1$; applicando la relazione sul prodotto delle soluzioni trovi che ....

31 Nell'equazione parametrica $2x^2 - kx + k - 2 = 0$, determina il parametro in modo che le radici siano reali e che:

a. $x_1 = 2$ **b.** $x_1 + x_2 = 1$ **c.** $x_1 \cdot x_2 = -1$

32 Data l'equazione $x^2 - (k+2)x + (k+5) = 0$, determina il valore del parametro k in modo che le soluzioni siano reali e che:

a. l'equazione abbia radici coincidenti
b. una radice sia uguale a 3
c. la somma dei quadrati delle radici sia uguale a 9.
(Suggerimento caso **c.**: $x_1^2 + x_2^2 = 9$ significa $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9$)

33 Data l'equazione $2x^2 - (k+1)x + 2k - 6 = 0$, determina il valore di k in modo che le soluzioni siano reali e che:

a. le radici siano opposte
b. le radici siano una il reciproco dell'altra
c. una soluzione sia nulla
d. la somma dei quadrati delle radici sia uguale a 13.

Risultati di alcuni esercizi.

1 **a.** $S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$; **b.** $S = \left\{0, -\frac{1}{5}\right\}$ **2** **a.** $S = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$; **b.** $S = \{0\}$ **3** **a.** $S = \left\{0, \frac{16}{3}\right\}$; **b.** $S = \{0\}$

4 **a.** $S = \varnothing$; **b.** $S = \varnothing$ **5** **a.** $S = \left\{-\frac{5}{2}, 1\right\}$; **b.** $S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

6 **a.** $S = \varnothing$; **b.** $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ **7** **a.** $S = \left\{\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right\}$; **b.** $S = \left\{\frac{3}{4}, 1\right\}$

8 **a.** $S = \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$; **b.** $S = \left\{-2, \frac{2}{3}\right\}$ **9** **a.** $S = \{1, -7\}$; **b.** $S = \{-1 \pm \sqrt{2}\}$

10 **a.** $S = \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3} \right\}$; **b.** $S = \left\{ -\frac{3}{5}, 1 \right\}$

11 **a.** $S = \left\{ -\frac{5}{3}, 1 \right\}$; **b.** $S = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{7}{4} \right\}$

12 $S = \left\{ 1, \frac{7}{5} \right\}$

13 $S = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5} \right\}$

14 $S = \left\{ -\frac{7}{2} \right\}$

15 $S = \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\}$

16 $S = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4} \right\}$

17 $S = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{6} \right\}$

18 $S = \left\{ \frac{13}{5} \right\}$

19 $S = \{a, -3a\}$

20 se $a \neq \frac{1}{2} : S = \left\{ 1, \frac{1}{2a-1} \right\}$; se $a = \frac{1}{2} : S = \{1\}$

21 se $a \neq 0 : S = \left\{ -\frac{1+3a^2}{a}, 3a \right\}$; se $a = 0$: l'equazione perde significato

22 se $a \neq 0 : S = \left\{ -2a, -\frac{2}{a} \right\}$; se $a = 0$: l'equazione perde significato

24 se $a \neq 0 : S = \{a, -6a\}$; se $a = 0 : S = R$

25 se $a \neq 0 : S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}a \right\}$; se $a = 0$: l'equazione perde significato

26 **a.** $S = \{-7, 9\}$; **b.** $S = \{7, 5\}$

27 **a.** $8, -2$; **b.** $2, -4$; **c.** $1 \pm \sqrt{2}$

28 **a.** $2x^2 + 13x + 15 = 0$; **b.** $4x^2 - 9x + 2 = 0$; **c.** $6x^2 - x - 2 = 0$; **d.** $6x^2 + 7x - 20 = 0$

29 **a.** $(3x-5)(x+1)$; **b.** $(2-3x)(5x-1)$; **c.** $(5x+1)(x-2)$; **d.** $(3x+2)(2x+3)$

30 soluzioni reali se $k \leq -11 \ \vee \ k \geq 1$; **a.** $k = 5$; **b.** $k = -11 \ \vee \ k = 1$; **c.** $\nexists k$; **d.** $k = 4$

31 soluzioni reali $\forall k \in R$; **a.** $k = 6$; **b.** $k = 2$; **c.** $k = 0$

32 **a.** $k = \pm 4$; **b.** $k = 4$; **c.** $k = -5$

33 **a.** $k = -1$; **b.** $k = 4$; **c.** $k = 3$; **d.** $k = -3 \ \vee \ k = 9$

Verifica del recupero

1 Indica quali fra le seguenti uguaglianze sono vere e quali sono false.

a. $\sqrt[8]{a^4+b^4}=\sqrt{a+b}$ V F

b. $\sqrt[8]{16x^4y^{12}}=\sqrt{16xy^3}$ V F

c. $\sqrt[3]{8a^6b^9}=2a^2b^3$ V F

d. $\sqrt[4]{\frac{9}{25}x^8y^2}=\sqrt{\frac{3}{5}x^4|y|}$ V F

1 punto

2 Semplifica le seguenti espressioni:

a. $\sqrt{\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+xy}}:\left[\sqrt[3]{\frac{x^2-y^2}{x}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2+2xy}}\right]$

b. $\sqrt{x^2-2}:\left(\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{x+\sqrt{2}}\right)$

c. $\left(\sqrt{3}-2\right)^2-\sqrt{12}+\sqrt{27}+2\sqrt{75}$

0,5 punti per ogni esercizio

3 Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni:

a. $\frac{3}{\sqrt{6}}$ **b.** $\frac{5x}{\sqrt[4]{x^3}}$ **c.** $\frac{-11}{3-2\sqrt{5}}$ **d.** $\frac{3}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$

0,25 punti per ogni esercizio

4 Riscrivi la prima espressione in modo che non vi compaiano simboli di radice e, viceversa, riscrivi la seconda sostituendo gli esponenti frazionari con il simbolo corrispondente di radice

a. $\sqrt{\frac{x\sqrt{xy}}{8}}$ **b.** $\left(\frac{1}{2}a^4y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$

0,5 punti

5 Risolvi in R le seguenti equazioni di secondo grado:

a. $x^2+\left(8-3\sqrt{3}\right)x-24\sqrt{3}=0$ **b.** $(x-3)^2+1=10(x+1)$ **c.** $4x-1=\frac{3}{1-x}+10$

0,5 punti per ogni esercizio

6 Risolvi e discuti le seguenti equazioni:

a. $a\left(x^2+2a\right)+x\left(x-a^2\right)=3ax$ **b.** $x^2-2=\frac{x\left(2a^2-1\right)}{a}$

1 punto per ogni esercizio

7 Determina due numeri sapendo che la loro somma è $\frac{5}{4}$ e che il loro prodotto è $\frac{3}{8}$.

0,5 punti

8 Data l'equazione parametrica $kx^2 + 2(k-6)x + k - 1 = 0$, stabilisci per quale valore di k le soluzioni sono reali e soddisfano le seguenti condizioni:

a. sono coincidenti

b. sono opposte

c. il loro prodotto è uguale a 3

d. una soluzione vale 1.

2 punti

Soluzioni

1 **a.** F; **b.** F; **c.** V; **d.** V

2 **a.** $\sqrt[6]{\dfrac{(x-y)^2}{x(x+y)^3}}$; **b.** $\sqrt[6]{x^2-2}$; **c.** $7+7\sqrt{3}$

3 **a.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$; **b.** $5\sqrt[4]{x}$; **c.** $3+2\sqrt{5}$; **d.** $3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

4 **a.** $\dfrac{x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{2}}}$; **b.** $\sqrt{\dfrac{1}{8}a^{12}\sqrt{y^3}}$

5 **a.** $S = \{3\sqrt{3},\ -8\}$; **b.** $S = \{0,\ 16\}$; **c.** $S = \left\{2,\ \dfrac{7}{4}\right\}$

6 **a.** se $a \neq -1 : S = \left\{a,\ \dfrac{2a}{a+1}\right\}$; se $a = -1 : S = \{-1\}$

b. se $a \neq 0 : S = \left\{2a,\ -\dfrac{1}{a}\right\}$; se $a = 0$: l'equazione perde significato

7 $\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{2}$

8 **a.** $k = \dfrac{36}{11}$; **b.** $k = 6$, valore non accettabile; **c.** $k = -\dfrac{1}{2}$; **d.** $k = \dfrac{13}{4}$

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	
Punteggio									

Valutazione in decimi

Math in English

Gli esercizi proposti in questa rubrica conclusiva dell'area provengono da gare di Matematica internazionali e da esami finali, opportunamente adattati, in varie scuole dei Paesi di lingua anglosassone.

Glossary

completing square method	metodo di completamento del quadrato	**radical**	radicale
		real number	numero reale
inequality	disuguaglianza, disequazione	**roommate**	compagno di stanza
		solution	soluzione
method	metodo	**to solve**	risolvere
to perform	eseguire, svolgere	**trinomial**	trinomio

1 Simplify the radical: $\sqrt[5]{-32x^7y^9}$:

a. $-2\sqrt[5]{x^7y^9}$ **b.** $-4\sqrt[5]{2x^7y^9}$ **c.** $-2xy\sqrt[5]{x^2y^4}$ **d.** $-4xy\sqrt[5]{2x^2y^4}$ **e.** not a real number

2 Evaluate:

① $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$: **a.** $-\dfrac{2}{3}$ **b.** $\dfrac{4}{9}$ **c.** $-\dfrac{9}{4}$ **d.** $\dfrac{9}{4}$ **e.** not a real number

② $\dfrac{\left(9x^4y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(x^6y^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}}$: **a.** $\dfrac{3y^2}{x^4}$ **b.** $\dfrac{x^4y^2}{3}$ **c.** $-\dfrac{9}{2x^4}$ **d.** $-\dfrac{9y^2}{2}$ **e.** $\dfrac{y^2}{3x^4}$

3 Perform the indicated operations and simplify:

① $\sqrt[3]{9x^5y^{20}} \cdot \sqrt[3]{3x^3y^7}$:

a. $9x^2y^3$ **b.** $3x^2y^3$ **c.** $3x^2y^9\sqrt[3]{x^2}$ **d.** $9x^2y^9\sqrt[3]{x^2}$ **e.** none of these

② $\dfrac{\sqrt{18x^9y^{13}}}{\sqrt{2x^4y^{10}}}$:

a. $3x^2y\sqrt{xy}$ **b.** $4\sqrt{x^5y^3}$ **c.** $3\sqrt{x^5y^3}$ **d.** $4x^2y\sqrt{xy}$ **e.** none of these

③ $4\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 7\sqrt{2}$:

a. $2\sqrt{3} + 10\sqrt{2}$ **b.** cannot be simplified **c.** $12\sqrt{5}$ **d.** $2\sqrt{3} + 7\sqrt{2}$ **e.** none of these

④ $\left(\sqrt{7x} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7x} + \sqrt{3}\right)$:

a. $2\sqrt{21x} + 7x - 3$ **b.** $\sqrt{42x} + 7x - 3$ **c.** $7x - 3$ **d.** 0 **e.** none of these

4 Rationalize the denominator: $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

a. $\dfrac{8-\sqrt{8}}{2}$ **b.** $\dfrac{4-\sqrt{15}}{2}$ **c.** -1 **d.** $4-\sqrt{15}$ **e.** none of these

5 Prove that the inequality $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{8}} \cdot (2^n)^{\frac{1}{2n}} < 4$ holds for all positive integers n.

6 Solve the equation $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{x-3}$

a. $x=4$ **b.** no solution **c.** $x=-2$ **d.** $x=3$ or $x=-2$ **e.** $x=6$ or $x=3$

7 If the completing square method is used to solve the equation $4x^2-8x=12$, the number which must be added to both sides to produce a perfect square trinomial on the left is what?
a. 16 **b.** -16 **c.** 4 **d.** 1 **e.** 5

8 The sum of two numbers is 4, and the product of the number is -21. The smaller of the two numbers is:
a. 3 **b.** -3 **c.** 7 **d.** -7 **e.** none of these

9 Solve the equation $x^{-2}-2=x^{-1}$. One of the solutions is:
a. $x=2$ **b.** $x=\dfrac{1}{2}$ **c.** $x=-2$ **d.** $x=1$ **e.** none of these

10 Solve the equation $(x+1)^2+2(x+1)=3$. One of the solutions is:
a. $x=-3$ **b.** $x=1$ **c.** $x=-4$ **d.** $x=3$ **e.** none of these

11 Working together, two roommates can paint their apartament in 10 hours. Working alone, one of them can complete the job in 15 hours less time than the other. How long would the faster person take, working alone?
a. 30 hours **b.** 15 hours **c.** 19 hours **d.** 10 hours **e.** none of these

1 c. **2** ① d.; ② e. **3** ① c.; ② c.; ③ d.; ④ c. **4** d. **6** c.

7 c. **8** b. **9** b. **10** c. **11** b.