Concetti chiave e regole

Grandezze omogenee

Un insieme G di elementi costituisce una **classe di grandezze omogenee** se:

- due qualsiasi elementi di G sono sempre confrontabili
- esiste in G un'operazione di addizione commutativa, associativa e dotata di elemento neutro.

Due grandezze di una stessa classe si dicono **commensurabili** se hanno un sottomultiplo comune, **incommensurabili** in caso contrario.
Fissata un'unità di misura omogenea con le grandezze di quella classe, a ciascun elemento di G si può associare una misura che è sempre espressa da un numero reale che è:

- razionale se le due grandezze sono commensurabili
- irrazionale se le due grandezze sono incommensurabili.

Rapporti e proporzioni

Rapporto fra due grandezze omogenee A e B è la misura di A quando B è assunta come unità di misura; si verifica poi che il rapporto $\frac{A}{B}$ è anche uguale al quoziente fra le misure delle due grandezze rispetto ad una unità di misura comune.
Se il rapporto fra due grandezze è uguale al rapporto fra altre due (omogenee fra loro le prime e omogenee fra loro le seconde), si dice che le quattro grandezze sono **in proporzione**.
La proporzionalità fra grandezze gode delle seguenti proprietà:

- quattro grandezze sono in proporzione se e solo se lo sono le loro misure
- esiste sempre ed è unica una grandezza quarta proporzionale dopo altre tre.

Alla proporzione $a : b = c : d$ individuata dalle misure di quattro grandezze proporzionali si possono applicare le seguenti proprietà:

- **fondamentale**: $bc = ad$
- **invertire**: $b : a = d : c$
- **permutare**: $a : c = b : d$ oppure $d : b = c : a$
- **comporre e scomporre**: $(a \pm b) : a = (c \pm d) : c$ oppure $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$

Proporzionalità diretta, inversa e quadratica

Due insiemi di grandezze in corrispondenza biunivoca sono:

- **direttamente proporzionali** se il rapporto fra due grandezze del primo insieme è uguale al rapporto fra le corrispondenti due del secondo per ogni coppia di elementi considerati
- **inversamente proporzionali** se il rapporto fra due grandezze del primo insieme è uguale al rapporto inverso fra le corrispondenti due del secondo per ogni coppia di elementi considerati.

Oltre che applicando la definizione, si può stabilire se due insiemi di grandezze sono direttamente proporzionali mediante un **criterio generale di proporzionalità**; A e B sono insiemi di grandezze proporzionali se e solo se:

- ad elementi uguali in A corrispondono elementi uguali in B e
- alla somma di due elementi in A corrisponde la somma dei corrispondenti elementi in B.

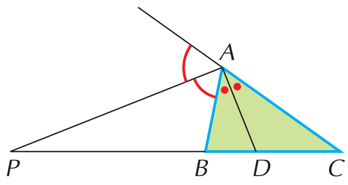
In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale:

- la proporzionalità diretta è rappresentata dalla retta $y = kx$
- la proporzionalità inversa è rappresentata dall'iperbole $y = \frac{k}{x}$
- la proporzionalità quadratica è rappresentata dalla parabola $y = kx^2$

Il teorema di Talete e le sue conseguenze

Le proprietà della proporzionalità diretta relativamente alle figure geometriche sono evidenziate da alcuni teoremi:

- **teorema di Talete**: un fascio di rette parallele intercetta su due trasversali segmenti direttamente proporzionali
- **teorema della bisettrice dell'angolo interno**: la bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati: $BD : AB = DC : AC$
- **teorema della bisettrice dell'angolo esterno:** se la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo incontra la retta del lato opposto in un punto P, il segmento PC ed il segmento PB stanno nello stesso rapporto degli altri due lati del triangolo: $PC : AC = PB : AB$.



Le aree dei poligoni

Le principali formule per il calcolo delle aree sono:

• rettangolo di dimensioni b e h	$b \cdot h$
• quadrato di lato ℓ	ℓ^2
• parallelogramma di base b e altezza h	$b \cdot h$
• triangolo di base b e altezza h oppure, se p è il semiperimetro e a, b, c i lati	$\frac{1}{2} b \cdot h$ $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
• trapezio di basi b e B e altezza h	$\frac{1}{2}(B+b) \cdot h$
• rombo di diagonali d_1 e d_2	$\frac{1}{2}\ d_1 \cdot d_2$

I teoremi di Pitagora e di Euclide

Qualunque relazione fra elementi omogenei di un poligono si può estendere alle misure di quelle grandezze; in particolare, con riferimento al triangolo della figura, rettangolo in A:

- teorema di Pitagora: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$
- primo teorema di Euclide: $\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \ \wedge \ \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{HC}$
- secondo teorema di Euclide: $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$