Attività di recupero

Cap 1. La circonferenza

Rivedi la teoria

I luoghi geometrici

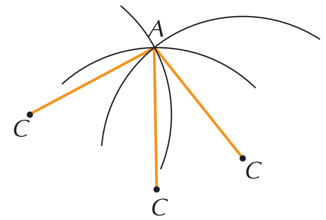
Un **luogo** è l'insieme di tutti e soli gli oggetti geometrici che possiedono una proprietà P; se gli oggetti sono punti, si parla di **luogo di punti**. Esempi di luoghi di punti sono i seguenti:

- l'asse di un segmento: è il luogo dei punti che sono equidistanti dagli estremi del segmento
- la bisettrice di un angolo: è il luogo dei punti che sono equidistanti dai lati dell'angolo.

La circonferenza e il cerchio

Il luogo dei punti che sono equidistanti da un punto fisso O si chiama **circonferenza**; O ne è il *centro*, il segmento che rappresenta la distanza dal centro si chiama *raggio*.
L'insieme dei punti della circonferenza e di quelli ad essa interni si chiama **cerchio**.

Fai gli esercizi

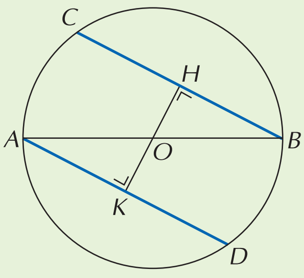


1 Considera l'insieme delle circonferenze che passano per uno stesso punto A e che hanno tutte lo stesso raggio r; qual è il luogo dei centri C di queste circonferenze?

2 Sono dati due punti A e B; qual è il luogo dei centri delle circonferenze che passano per A e B?

3 **ESERCIZIO GUIDA**

Consideriamo una circonferenza di diametro AB, tracciamo da A una corda qualsiasi AD e da B la corda ad essa parallela BC. Dimostriamo che le due corde sono congruenti.



Hp. $CB \parallel AD$ **Th.** $CB \cong AD$

Possiamo procedere alla dimostrazione in due modi.

- **Primo metodo.**
Tracciamo le distanze OH e OK del centro dalle due corde e consideriamo i triangoli rettangoli OHB e OKA; di essi si sa che:

$OB \cong$ .... perché ....; $\widehat{OBH} \cong$ .... perché ....

quindi ....

- **Secondo metodo.**
Sappiamo che O è il centro di simmetria della figura, allora $A = \sigma_O(B)$; essendo poi $BC \parallel AD$, la retta BC è simmetrica della retta ....; inoltre il punto di intersezione della retta BC con la circonferenza, ha come corrispondente il punto di intersezione della retta AD con la circonferenza, quindi $C = \sigma_O(.....)$. Possiamo allora concludere che ....

4 Prolunga una corda AB di una circonferenza di centro C di due segmenti AP e BQ fra loro congruenti e dimostra che $\widehat{BCQ} \cong \widehat{ACP}$.

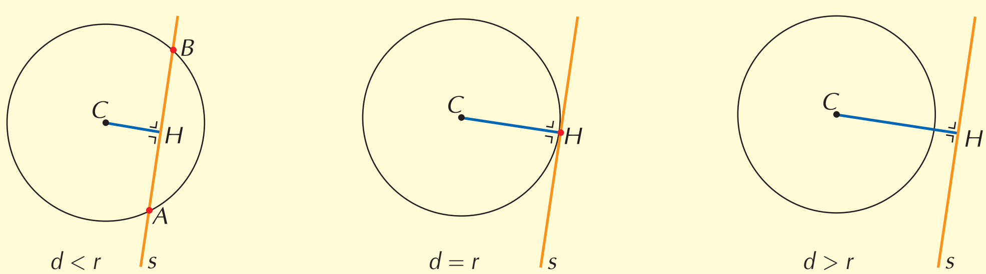
5 Sia AB il diametro di una semicirconferenza di centro O e siano C e D due punti del diametro equidistanti dagli estremi. Conduci per C e per D due corde fra loro parallele che incontrano la semicirconferenza in Q e in S. Dimostra che il quadrilatero $CDSQ$ è un trapezio rettangolo.
(Suggerimento: traccia da O la perpendicolare OH alla corda QS che la divide in due parti congruenti; essendo $CO \cong OD$ e $QH \cong HS$, le rette DS, OH e CQ sono ....)

Rivedi la teoria

Posizioni reciproche di rette e circonferenze

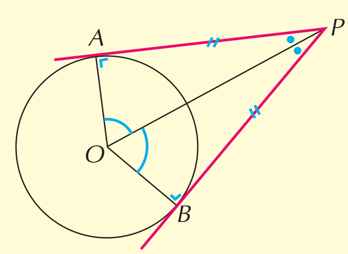
Una retta e una circonferenza possono avere in comune:

- due punti e in questo caso si dice che la retta è **secante** rispetto alla circonferenza; la sua distanza dal centro è minore del raggio
- un solo punto e in questo caso si dice che la retta è **tangente** rispetto alla circonferenza; la sua distanza dal centro è uguale al raggio
- nessun punto e in questo caso si dice che la retta è **esterna** rispetto alla circonferenza; la sua distanza dal centro è maggiore del raggio.



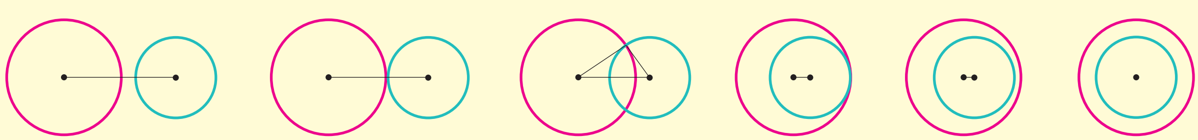
Le **rette tangenti** godono di alcune proprietà:

- il raggio nel punto di tangenza è perpendicolare alla tangente
- se da un punto P esterno a una circonferenza si conducono le tangenti:
  - i due segmenti di tangente sono congruenti
  - la semiretta uscente da P e passante per O è bisettrice dell'angolo formato dalle tangenti.



Posizioni reciproche di due circonferenze

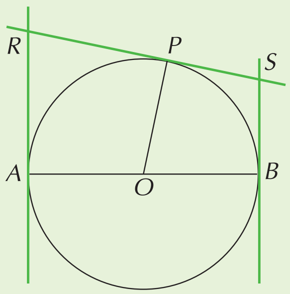
Le posizioni reciproche che possono assumere due circonferenze sono quelle indicate nella seguente figura dove r e r' sono i raggi delle due circonferenze e d è la distanza fra i due centri:



esterne	tangenti esternamente	secanti	tangenti internamente	interne	concentriche
$d > r + r'$	$d = r + r'$	$d < r + r'$ $d > r - r'$	$d = r - r'$	$d < r - r'$	$d = 0$

6 **ESERCIZIO GUIDA**

E' data una circonferenza di diametro AB e centro O; fissiamo un punto P su di essa e tracciamo le rette tangenti in A, B e P. La tangente in P incontra quella in A in R e quella in B in S. Dimostriamo che l'angolo $\widehat{ROS}$ è retto.



Hp. $AB \perp AR$ **Th.** $\widehat{ROS}$ è retto

$AB \perp BS$

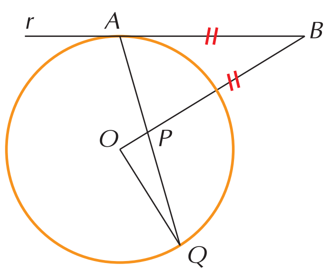
$RS \perp OP$

Osserviamo innanzi tutto che le rette AR e BS sono parallele perché .... quindi gli angoli $\widehat{ARP}$ e $\widehat{BSP}$ sono supplementari perché ....

Per il teorema ricordato, RO e SO (traccia questi segmenti) sono le ..... degli angoli $\widehat{ARP}$ e $\widehat{BSP}$, quindi $\widehat{ORP}$ e $\widehat{OSP}$ sono .... Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è .....

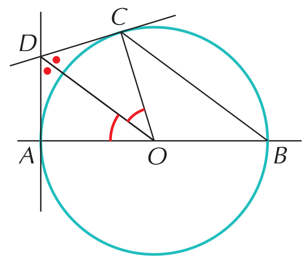
7 Disegna una circonferenza di centro O, prendi un punto A su di essa e traccia la retta r tangente in A; considera poi un punto B su r e traccia il segmento BO; su BO prendi poi un punto P in modo che $BP \cong BA$; traccia AP fino ad incontrare in Q la circonferenza. Dimostra che $\widehat{QOB}$ è retto.
(Suggerimento: tracciato il raggio OA, i triangoli ABP e AOQ sono isosceli; gli angoli $\widehat{OAQ}$ e $\widehat{BAP}$ sono complementari, quindi ....)

es. 7



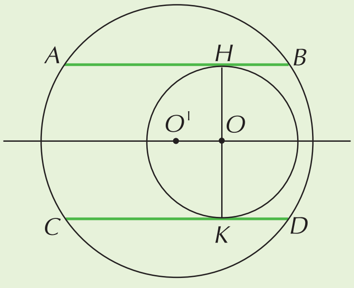
8 E' data una circonferenza di centro O e diametro AB; traccia per B una corda BC e poi le rette tangenti alla circonferenza in A e in C che si intersecano in D. Dimostra che OD è parallelo a BC.
(Suggerimento: il triangolo COB è isoscele e l'angolo $\widehat{AOC}$ è uno dei suoi angoli esterni)

es. 8



9 **ESERCIZIO GUIDA**

Date due circonferenze interne l'una all'altra, tracciamo la retta dei centri e consideriamo le due corde della circonferenza esterna tangenti alla circonferenza più interna e parallele alla retta dei centri. Dimostriamo che tali corde sono congruenti.



Hp. $AB \parallel$ .... **Th.** $AB \cong CD$

$CD \parallel$ ....

$OH \perp$ ....

$OK \perp$ ....

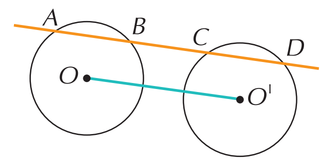
Osserviamo che i segmenti OH e OK sono congruenti e che i punti H, O, K sono allineati perché ....

Essendo $AB \parallel CD$ per ipotesi, i segmenti OH e OK rappresentano anche la distanza del centro O' della circonferenza più esterna dalle due corde AB e CD; quindi ....

Potevi anche dimostrare la congruenza delle due corde per simmetria: la figura è infatti simmetrica rispetto alla retta dei centri e quindi ....

10 Due circonferenze di centri O e O' sono congruenti ed esterne una all'altra; una retta r parallela alla retta dei centri interseca la prima in A e B, la seconda in C e D come nella figura.
Dimostra che $OO' \cong AC \cong BD$.

es. 10



Rivedi la teoria

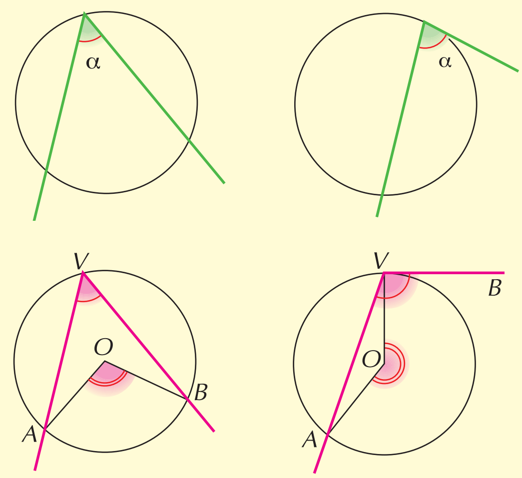
Angoli al centro e angoli alla circonferenza

Un angolo alla circonferenza è un angolo che ha il vertice sulla circonferenza; i suoi lati possono essere:

- entrambi secanti
- uno secante e l'altro tangente

Ad ogni angolo alla circonferenza $\widehat{AVB}$ corrisponde un angolo al centro che si costruisce in questo modo:

- se i lati sono entrambi secanti, si tracciano i raggi nei punti A e B di intersezione dei lati con la circonferenza; detto O il centro, l'angolo al centro è $\widehat{AOB}$
- se uno dei lati è secante e l'altro è tangente, si tracciano i raggi OA e OV, l'angolo al centro è $\widehat{AOV}$.



Gli angoli al centro devono "guardare" verso lo stesso arco su cui insiste l'angolo alla circonferenza.

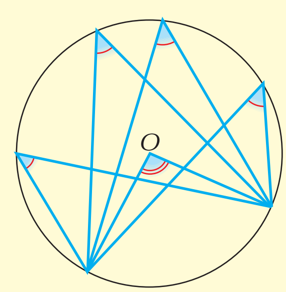
La proprietà

Ad ogni angolo alla circonferenza corrisponde un solo angolo al centro, ma ad ogni angolo al centro corrispondono infiniti angoli alla circonferenza.
In ogni caso si verifica sempre che:

- l'angolo alla circonferenza è sempre la metà del corrispondente angolo al centro.

Di conseguenza:

- angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco o su archi congruenti sono congruenti.



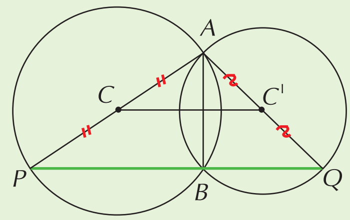
Fai gli esercizi

11 **ESERCIZIO GUIDA**

Consideriamo due circonferenze secanti di centri C e C' e indichiamo con A e B i loro punti di intersezione; siano poi AP e AQ i diametri delle due circonferenze. Dimostriamo che:

a. i punti P, B e Q sono allineati

b. PQ è congruente al doppio della distanza fra i centri.



Hp. .... **Th.** ....

a. L'angolo $\widehat{ABQ}$ è un angolo alla circonferenza che insiste su .... e quindi è ....

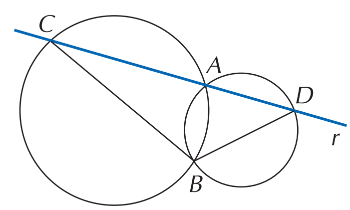
Anche l'angolo $\widehat{ABP}$ è un angolo alla circonferenza che insiste su .... e quindi è ....

Allora l'angolo $\widehat{PBQ}$ è .... e quindi i punti P, B, Q sono allineati.

b. Per dimostrare la seconda tesi ricorda che il segmento che congiunge i punti medi dei lati di un triangolo è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà.

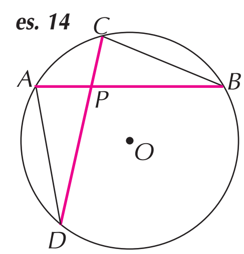
12 Due circonferenze secanti si intersecano in A e in B; una retta r per A interseca ulteriormente le circonferenze in C e in D. Dimostra che, al variare della retta r, gli angoli del triangolo BCD hanno sempre la stessa ampiezza.
(Suggerimento: gli angoli di vertici C e D insistono sempre sullo stesso arco)

es. 12



13 Sia AP una corda di una circonferenza di centro C e diametro AB. Traccia le rette tangenti alla circonferenza in B e in P e indica con Q il loro punto di intersezione. Dimostra che gli angoli $\widehat{CQP}$ e $\widehat{PAC}$ sono complementari.

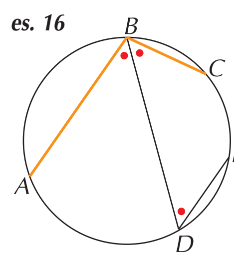
es. 14



14 In una circonferenza due corde congruenti AB e CD si intersecano in un punto P. Dimostra che le due parti in cui resta divisa AB da P sono congruenti alle parti in cui resta divisa CD.

15 Disegna una semicirconferenza di diametro AB, traccia una corda AC e la tangente in B alla circonferenza; la bisettrice dell'angolo $\widehat{CAB}$ incontra la corda BC in D e la retta tangente in F. Dimostra che il triangolo BDF è isoscele.

es. 16

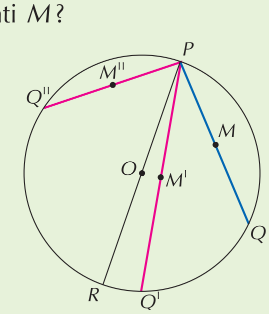


16 Siano AB e BC due corde di una circonferenza; per il punto medio D dell'arco $\overset{\frown}{AC}$ non contenente B traccia la parallela alla corda AB che interseca ulteriormente la circonferenza in E. Dimostra che $DE \cong BC$.

17 **ESERCIZIO GUIDA**

Consideriamo una circonferenza γ di centro O e un suo punto fisso P; sia poi Q un punto variabile su γ e M il punto medio del segmento PQ. Qual è il luogo geometrico dei punti M?

Osserviamo che, tracciato il diametro PR, il punto O appartiene al luogo cercato perché è il punto medio della corda PR; inoltre anche il punto P deve appartenere al luogo perché, considerata la corda per P di lunghezza nulla, P coincide con M. Osserviamo poi che gli angoli $\widehat{OMP}$ sono tutti retti perché ....
Il luogo cercato è quindi la circonferenza avente per diametro ....



18 E′ dato un rettangolo $ABCD$ in cui i punti A e C sono fissi mentre B e D sono variabili. Qual è il luogo dei punti B e D?

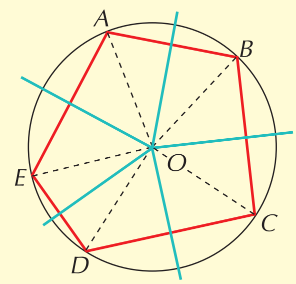
19 Considera una circonferenza γ e un suo punto P. Qual è il luogo dei centri delle circonferenze che sono tangenti a γ in P?
(Suggerimento: due circonferenze sono tangenti in un punto P se hanno in quel punto la stessa retta tangente)

Cap 2. I POLIGONI E LA CIRCONFERENZA

Rivedi la teoria

Poligoni inscritti

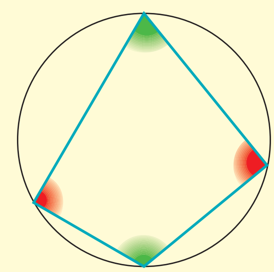
Un poligono si dice inscritto in una circonferenza se tutti i suoi vertici sono punti della circonferenza.
Ogni poligono inscritto ha la caratteristica che gli assi dei suoi lati si incontrano nel centro della circonferenza.



I quadrilateri inscritti hanno una ulteriore proprietà:

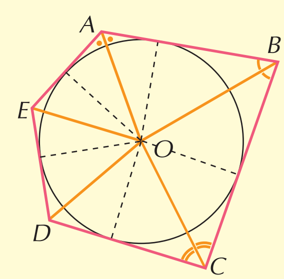
- gli angoli opposti sono supplementari.

Questa proprietà si può invertire e può essere usata anche per riconoscere se un quadrilatero è inscrittibile in una circonferenza.



I poligoni circoscritti

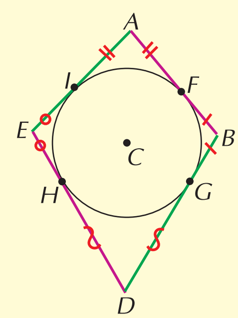
Un poligono si dice circoscritto a una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.
Ogni poligono circoscritto ha la caratteristica che le bisettrici dei suoi angoli si incontrano nel centro della circonferenza.



I quadrilateri circoscritti hanno una ulteriore proprietà:

- la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due.

Anche questa proprietà si può invertire e può essere usata per riconoscere se un quadrilatero è circoscrittibile a una circonferenza.



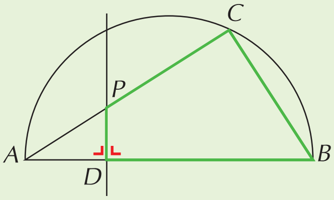
Fai gli esercizi

1 **ESERCIZIO GUIDA**

E′ dato un triangolo ABC inscritto in una semicirconferenza di diametro AB; da un punto D del diametro traccia la perpendicolare ad AB stesso che interseca la corda AC in P. Dimostra che il quadrilatero $BCPD$ è inscrittibile in una circonferenza. Qual è il diametro di tale circonferenza?

Scrivi l'ipotesi del teorema basandoti anche sulla figura.

Hp. .... **Th.** $BCPD$ è inscrittibile



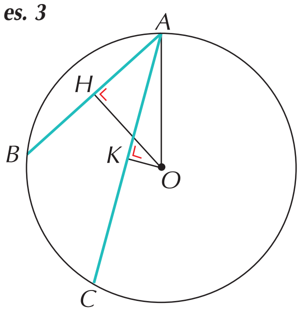
L'angolo $\widehat{PDB}$ è retto, l'angolo $\widehat{PCB}$ ...., quindi ....

Visto che i triangoli PDB e PCB sono rettangoli, il diametro della circonferenza è il segmento ....

2 Riprendi il teorema precedente e indica con Q il punto di intersezione della retta BC con la perpendicolare PD. Dimostra che anche il quadrilatero $ADCQ$ è inscrittibile in una circonferenza. Sapresti dire qual è il diametro di questa circonferenza?

3 In una circonferenza di centro O sono date le corde consecutive AB e AC che si trovano dalla stessa parte rispetto al centro. Indicato con H il piede della perpendicolare condotta da O alla corda AB e con K quello della perpendicolare da O ad AC, dimostra che il quadrilatero $AOKH$ (oppure $AOHK$ a seconda di come hai disposto le lettere) è inscrittibile in una circonferenza. Qual è il diametro di tale circonferenza?

es. 3

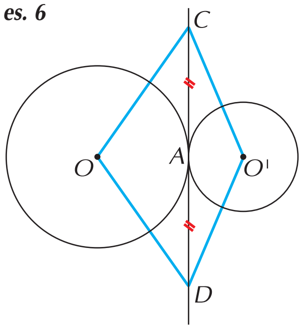


4 Un quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza di centro O e si conoscono le misure dei seguenti angoli: $\widehat{AOB} = 90°$, $\widehat{BOC} = 60°$, $\widehat{COD} = 140°$. Calcola le misure degli angoli del quadrilatero.

5 Un quadrilatero è ottenuto mediante l'accostamento di due triangoli isosceli che hanno la base in comune e che si trovano da parte opposta rispetto alla base. Dimostra che il quadrilatero è circoscrittibile ad una circonferenza.

6 Sono date due circonferenze di centri O e O' tangenti esternamente in A; conduci per A la tangente comune r e prendi su di essa due punti C e D simmetrici rispetto ad A. Dimostra che il quadrilatero $OCO'D$ è circoscrittibile ad una circonferenza. Su quale segmento si trova il centro di tale circonferenza?

es. 6



7 Considera due diametri di una circonferenza e traccia dai loro estremi le rette tangenti alla circonferenza. Dimostra che tali rette formano un rombo. In quale caso si ottiene un quadrato?

Rivedi la teoria

Poligoni regolari

Un poligono è regolare se ha tutti i lati e tutti gli angoli congruenti fra loro.

I poligoni regolari, qualunque sia il numero dei lati, godono della seguente proprietà:

- sono sempre sia inscrittibili che circoscrittibili a una circonferenza.

I punti notevoli dei triangoli

- Gli assi dei lati di un triangolo passano per uno stesso punto che si chiama **circocentro** e che rappresenta il centro della circonferenza circoscritta.
- Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo passano per uno stesso punto che si chiama **incentro** e che rappresenta il centro della circonferenza inscritta.
- Le altezze di un triangolo passano per uno stesso punto che si chiama **ortocentro**.
- Le mediane di un triangolo passano per uno stesso punto che si chiama **baricentro**; tale punto divide ciascuna mediana in due parti tali che quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.

Fai gli esercizi

8 **ESERCIZIO GUIDA**

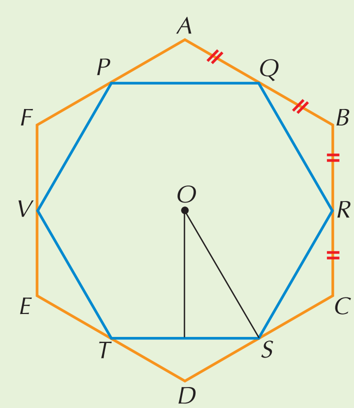
Dimostriamo che i punti medi di un poligono regolare sono i vertici di un altro poligono regolare e che le circonferenze inscritta e circoscritta a tale poligono sono concentriche alle circonferenze inscritta e circoscritta al primo poligono regolare.

Considera i triangoli QBR, RCS, SDT, ... che sono tutti congruenti perché ...., quindi i lati QR, RS, ST, ... sono congruenti perché ....

Inoltre gli angoli $Q\widehat{R}S$, $R\widehat{S}T$, $S\widehat{T}V$, ... sono congruenti perché ....

Il poligono $PQRSTV$ è quindi regolare perché ha i lati e gli angoli congruenti fra loro.

Sia O il centro delle circonferenze inscritta e circoscritta al poligono $ABCDEF$; i segmenti OS, OT, OV, ... sono tutti congruenti perché raggi della circonferenza inscritta in tale poligono; allora O è anche il centro della circonferenza ....

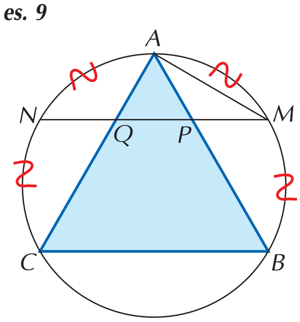


Considerata ora la circonferenza di centro O e raggio OS, i lati del poligono $PQRSTV$ sono corde congruenti di tale circonferenza, quindi ....

9 Sia ABC un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza; indicati con M il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ e con N il punto medio dell'arco $\overset{\frown}{AC}$, traccia la corda MN che incontra il lato AB in P e il lato AC in Q. Dimostra che $MP \cong PQ \cong QN$.

(Suggerimento: gli angoli $A\widehat{M}N$ e $M\widehat{A}B$ sono congruenti perché ...., quindi $AP \cong$ ......)

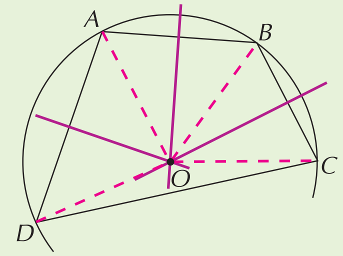
es. 9



10 **ESERCIZIO GUIDA**

Dimostriamo che se gli assi di tre lati di un quadrilatero passano per uno stesso punto *O*, anche l'asse del quarto lato passa per *O*. Che cosa si può dire di un tale quadrilatero?

Dato il quadrilatero *ABCD*, supponiamo che gli assi dei lati *AD*, *AB* e *BC* si intersechino in *O*; per la proprietà dell'asse si ha che $OD \cong OA \cong$ .... $\cong$ ...., quindi *O* appartiene ....
I punti *A*, *B*, *C*, *D*, essendo equidistanti da *O*, appartengono allora ad una circonferenza e perciò il quadrilatero *ABCD* ....



11 Un triangolo *ABC*, isoscele di base *BC*, è inscritto in una circonferenza; la bisettrice dell'angolo di vertice *B* incontra ulteriormente la circonferenza in *E*, la bisettrice dell'angolo di vertice *C* incontra ulteriormente la circonferenza in *F*. Detto *O* l'incentro del triangolo, dimostra che *AFOE* è un rombo.

Verifica del recupero

1 Barra vero o falso.

a. Una corda di una circonferenza è sempre divisa a metà dal raggio ad essa perpendicolare. V F

b. Se due corde sono congruenti hanno la stessa distanza dal centro. V F

c. Se due circonferenze sono tangenti esternamente la distanza fra i loro centri è congruente alla differenza dei raggi. V F

d. Se una retta è secante rispetto ad una circonferenza, la sua distanza dal centro della circonferenza è uguale al raggio. V F

e. Se due circonferenze sono interne, la distanza fra i centri è minore della differenza fra i raggi. V F

f. Se due circonferenze sono tangenti esternamente si possono tracciare tre rette distinte che sono tangenti ad entrambe le circonferenze. V F

1,5 punti

2 Completa le seguenti proposizioni in modo che risultino vere.

a. In ogni circonferenza se due angoli al centro sono congruenti gli archi su cui insistono sono ....

b. In ogni circonferenza ad un angolo al centro corrispondono .... angoli alla circonferenza.

c. In ogni circonferenza ciascun angolo alla circonferenza è congruente .... del corrispondente angolo al centro.

d. Se un angolo alla circonferenza insiste su una semicirconferenza, allora è ....

1 punto

3 Due circonferenze sono tangenti internamente in P ed il raggio della circonferenza maggiore è congruente al diametro di quella minore; sia PA una corda qualunque della circonferenza maggiore che incontra la minore in M. Dimostra che M è il punto medio di AP.

2,5 punti

4 Disegna un triangolo isoscele acutangolo ABC di base AB e traccia le altezze AH, BK, CR. Dimostra che il quadrilatero $CHRK$ è circoscrittibile ad una circonferenza.

3 punti

5 Barra vero o falso.

a. In un triangolo isoscele, incentro, circocentro, baricentro e ortocentro coincidono. V F

b. In un triangolo equilatero, incentro, circocentro, baricentro e ortocentro coincidono. V F

c. Il baricentro di un triangolo divide ciascuna mediana in due parti congruenti. V F

d. In un triangolo isoscele, incentro, ortocentro, circocentro e baricentro sono allineati con il vertice A del triangolo. V F

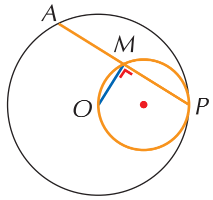
2 punti

Soluzioni

1 **a.** V, **b.** V, **c.** F, **d.** F, **e.** V, **f.** V

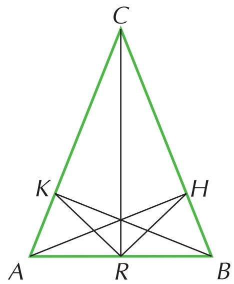
2 **a.** congruenti, **b.** infiniti, **c.** alla metà, **d.** retto

3



$\widehat{OMP}$ è retto perché inscritto in una semicirconferenza, quindi OM rappresenta la distanza del centro della circonferenza maggiore dalla corda AP; di conseguenza M è punto medio di AP.

4



I punti H e K sono simmetrici rispetto alla retta CR, quindi $CK \cong CH$, $KR \cong HR$. Nel quadrilatero $RHCK$ si ha quindi che $KC + RH \cong CH + RK$ e questo significa che è circoscrittibile.

5 **a.** F, **b.** V, **c.** F, **d.** V

Esercizio	1	2	3	4	5	
Punteggio						

Valutazione in decimi

Math in English

Glossary

arc	arco
circle	cerchio
circumference	circonferenza
diameter	diametro
polygon	poligono
radius (pl. radii)	raggio

1 Let P be a point on the circumference of a circle. Perpendiculars PA and PB are drawn to points A and B on two mutually perpendicular diameters. If $AB = 36$ inches, what is the diameter of the circle?

a. 8 in **b.** 16 in **c.** 24 in **d.** 36 in **e.** 72 in

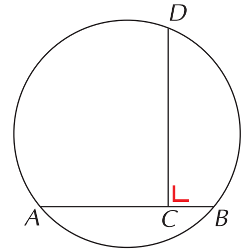
2 Let ABC be an equilateral triangle with side lenght of 6. Let P be the point of intersection of the three angle bisectors. Find the lenght of AP.

a. $2\sqrt{3}$ **b.** $\sqrt{3}$ **c.** $3\sqrt{3}$ **d.** $5\sqrt{3}$ **e.** $4\sqrt{3}$

3 A regular polygon has an interior angle that measures 144 degrees, and a side of which is 12 units long. What is the perimeter of the regular polygon?

a. 80 **b.** 100 **c.** 120
d. 140 **e.** 160

ex. 4

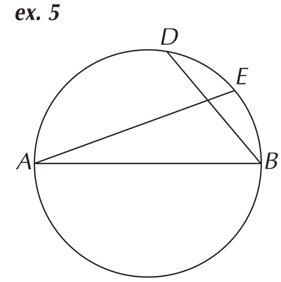


4 In the figure shown, $AB \perp CD$. Which of the following is true?

1. $\overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{AB}$ **2.** $\overset{\frown}{BD} \cong \overset{\frown}{AB}$ **3.** $AC \cong CD$

a. 1. **b.** 2. **c.** 3.
d. 1., 2., 3. **e.** none of these

ex. 5



5 In the figure shown, AB is a diameter of the circle. If $\widehat{A} = 20°$ and $\widehat{B} = 50°$, what is the measure of the arc $\overset{\frown}{DE}$?

a. 60° **b.** 55° **c.** 25°
d. 40° **e.** 30°

(Per "misura dell'arco *DE*" si intende la misura dell'angolo al centro che insiste su $\overset{\frown}{DE}$)

6 Two circles can divide a plane into 4 regions at most. What is the maximum number of regions obtained by dividing a plane with 4 circles?

a. 8 **b.** 10 **c.** 12 **d.** 14 **e.** 16

1 e. **2** a. **3** c. **4** e. **5** d. **6** d.