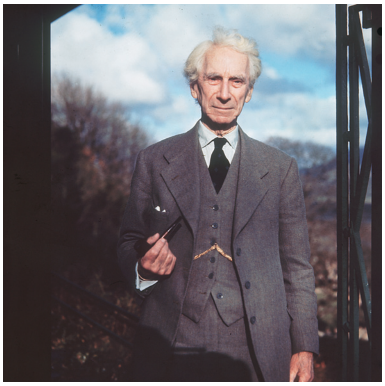


Scheda di approfondimento
GLI SVILUPPI DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI

L'uomo ha usato il concetto di insieme, pur senza rendersene conto, fin dall'antichità, tanto che ancora oggi i non esperti di matematica se ne servono a livello intuitivo.
Pensa al pastore che parla del suo gregge considerandolo un'unica entità; all'insegnante che si rivolge agli studenti della sua classe come ad un unico soggetto; al politico che in un comizio parla alla platea come ad un gruppo, formato sì da tanti elementi, ma che si possono considerare come un tutt'uno.
Nonostante questo concetto sia stato utilizzato dall'uomo già dai tempi antichi, bisogna arrivare fino al secolo scorso per trovare riferimenti ad una teoria organica. Per primo ***Georg Cantor*** (1845-1918), matematico tedesco di origine russa, fornì, intorno al 1870, una trattazione sistematica della teoria degli insiemi e soltanto nel 1895 cercò di precisare questo concetto nell'opera *I contributi a una fondazione della teoria transfinita degli insiemi.*
In quest'opera si legge: «Per insieme intendiamo una riunione *M*, in un tutto, di determinati e ben distinti oggetti *m* della nostra intuizione e del nostro pensiero (i quali vengono chiamati gli "elementi" di *M*)».
Per Cantor, la natura degli elementi degli insiemi con cui si opera non ha importanza; il modo di eseguire una operazione fra insiemi non varia sia che gli elementi degli insiemi considerati siano automobili, pesci, numeri o figure geometriche. Sono le leggi delle operazioni a caratterizzare l'insieme risultato, non la natura degli elementi su cui si opera.
Questo fatto ci fa intuire come la teoria degli insiemi abbia avuto una portata unificante per i vari rami della matematica. Ad esempio, mediante questa teoria, l'operazione di addizione fra numeri può essere ricondotta a regole più generali che comprendono anche «l'addizione» fra figure geometriche.
Inoltre la teoria degli insiemi è alla base dello sviluppo di importanti parti della matematica del nostro secolo, quali la *logica* (argomento che studieremo nel corso del terzo anno).
Gli studi di Cantor diedero origine alla cosiddetta **teoria ingenua degli insiemi**, che però non era priva di contraddizioni.
Esaminiamo, ad esempio, il seguente paradosso. Consideriamo l'insieme degli uomini di un villaggio che non si fanno la barba da soli, ma se la fanno fare dall'unico barbiere esistente in quel villaggio. Il barbiere appartiene all'insieme oppure no?
Se vi appartenesse non si raderebbe da solo, ma si farebbe radere dal barbiere, cioè da se stesso; quindi in realtà egli si rade da solo, cioè non appartiene all'insieme. Ma se egli non appartiene all'insieme, cioè se si rade da solo, in ogni caso, essendo barbiere, si fa radere dal barbiere. Quindi il barbiere appartiene e non appartiene nello stesso tempo all'insieme. Una contraddizione!
Il primo a porre in evidenza le contraddizioni della teoria ingenua degli insiemi fu il matematico e filosofo inglese ***Bertrand Russell*** (1872-1970), in una famosa lettera che egli scrisse nel 1902 al collega tedesco Gottlob Frege. La scoperta della "antinomia di Russell" (di cui il "paradosso del barbiere" costituisce un esempio) e di altre contraddizioni analoghe pose in crisi non solo la teoria insiemistica, ma tutta la vasta parte della matematica, che da essa derivava alcuni concetti fondamentali. Cominciò così il cosiddetto "periodo della crisi dei fondamenti" della matematica. Esso fu superato grazie a studi successivi che limitavano e precisavano i criteri di comprensione di un elemento in un insieme.
In particolare, fu sviluppata agli inizi del nostro secolo, ad opera di ***Ernst Zermelo*** (1871-1953) e di altri studiosi, una nuova teoria detta **assiomatica**, che superava le contraddizioni della teoria ingenua e che è ancora oggi attuale.


Bertrand Russell