

Le equazioni irrazionali con due radicali

Per risolvere un'equazione irrazionale contenente più di un radicale si possono applicare due metodi.

I metodo

- Si determina il dominio, imponendo che tutti i radicandi esistano e che i denominatori non risultino zero;
- si cerca di riscrivere l'equazione nella forma $\sqrt{A(x)} = B(x)$, elevando al quadrato entrambi i membri e isolando il radicale rimasto;
- si individua la nuova condizione di concordanza dei segni e quindi il nuovo dominio e si ripete l'operazione di innalzamento al quadrato, quindi si risolve l'equazione ottenuta;
- si controlla se le soluzioni fanno parte del dominio.

II metodo

- Si elevano al quadrato entrambi i membri fino a ricondurre l'equazione ad una equazione razionale;
- si trovano le soluzioni e si controlla l'accettabilità verificando se soddisfano l'equazione irrazionale.

I esempio.

Risolviamo l'equazione $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \frac{6}{\sqrt{x+4}}$

Imponiamo le condizioni di esistenza dei radicali

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad x \geq -2$$

Riduciamo l'equazione in forma intera: $\sqrt{(x+2)(x+4)} + x+4 = 6$

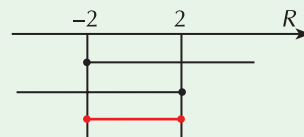
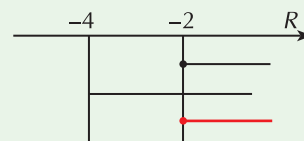
Isoliamo il radicale: $\sqrt{(x+2)(x+4)} = 2-x$

Possiamo elevare al quadrato entrambi i membri, ma dobbiamo imporre la condizione di concordanza dei segni.

Quindi le soluzioni saranno accettabili se: $\begin{cases} x \geq -2 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \rightarrow -2 \leq x \leq 2$

Eleviamo al quadrato e risolviamo l'equazione: $(x+2)(x+4) = (2-x)^2 \rightarrow 10x+4=0 \rightarrow x = -\frac{2}{5}$

La soluzione trovata appartiene all'insieme di accettabilità, quindi $S = \left\{-\frac{2}{5}\right\}$.



II esempio.

Risolviamo l'equazione $\sqrt{x+2} = 2 - \sqrt{x+1}$

Applichiamo i due possibili metodi.

- Imponiamo le condizioni di esistenza dei radicali $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow x \geq -1$

Spostiamo il secondo radicale al primo membro in modo che entrambi i membri siano positivi e sia quindi garantita la condizione di concordanza dei segni ed eleviamo al quadrato.

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} = 2 \rightarrow (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})^2 = 4 \rightarrow x+2 + x+1 + 2\sqrt{(x+2)(x+1)} = 4$$

$$2\sqrt{(x+2)(x+1)} = 1 - 2x$$

Prima di elevare ancora entrambi i membri al quadrato dobbiamo imporre le condizioni di concordanza dei segni, le soluzioni saranno quindi accettabili se

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \rightarrow -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Troviamo ora le soluzioni $4(x+2)(x+1) = (1-2x)^2 \rightarrow x = -\frac{7}{16}$.

La soluzione appartiene al dominio ed è quindi accettabile: $S = \left\{ -\frac{7}{16} \right\}$.

- Troviamo la soluzione e verifichiamo poi l'accettabilità sostituendola al posto dell'incognita nel testo.

Eleviamo al quadrato entrambi i membri: $x+2 = 4 - 4\sqrt{x+1} + x+1$

Svolgiamo i calcoli e isoliamo il radicale: $4\sqrt{x+1} = 3$

Eleviamo una seconda volta al quadrato: $16(x+1) = 9$

Troviamo la soluzione: $x = -\frac{7}{16}$

Verifichiamo adesso se la soluzione trovata è anche soluzione dell'equazione iniziale:

$$\sqrt{-\frac{7}{16} + 2} + 2 = 2 - \sqrt{-\frac{7}{16} + 1} \rightarrow \sqrt{\frac{25}{16}} = 2 - \sqrt{\frac{9}{16}} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

Avendo trovato un'identità, possiamo dire che l'insieme delle soluzioni è $S = \left\{ -\frac{7}{16} \right\}$.

ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con due radicali.

1 $\sqrt{4-x} - 2\sqrt{x} = 2$

$\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = -1$

$[S = \{0\}; S = \emptyset]$

2 $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} = 4$

$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1$

$[S = \{3\}; S = \{4, 0\}]$

3 $\sqrt{x+8} = 3 + \sqrt{x-1}$

$\sqrt{x+2} = \sqrt{3x+3} - 1$

$[S = \{1\}; S = \{2\}]$

4 $\sqrt{3+x} + 2 = \sqrt{x+19}$

$\sqrt{x+18} - 3 = \sqrt{x}$

$[S = \{6\}; S = \left\{ \frac{9}{4} \right\}]$

5 $\sqrt{3x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$

$2\sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{2x-4}$

$[S = \left\{ \frac{5}{12} \right\}; S = \{2\}]$

$$6 \quad \sqrt{-3x-1} - \sqrt{4x+3} = 0$$

$$7 \quad \sqrt{x-3} + \sqrt{x-6} = 3\sqrt{3}$$

$$8 \quad \sqrt{2(6x+5)} = 9 - \sqrt{12x+1}$$

$$9 \quad \sqrt{4x+2} - \sqrt{4x-2} = 2$$

$$10 \quad \sqrt{x^2-x-6} + \sqrt{x-3} = 0$$

$$11 \quad \sqrt{1+2x} + \sqrt{2x-1} = x+2$$

$$\sqrt{x^2-5} + \sqrt{x^2+16} = 7$$

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{3x+1} + 2 = 0$$

$$\sqrt{4(x+1)} = 5 - \sqrt{9-2x}$$

$$\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = 2$$

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+2} = 1$$

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+3} = 0$$

$$\left[s = \left\{ -\frac{4}{7} \right\}; s = \{\pm 3\} \right]$$

$$\left[s = \left\{ \frac{34}{3} \right\}; s = \{1, 5\} \right]$$

$$\left[s = \left\{ \frac{5}{4} \right\}; s = \left\{ 0, \frac{40}{9} \right\} \right]$$

$$\left[s = \left\{ \frac{1}{2} \right\}; s = \{\pm 2\} \right]$$

$$[s = \{3\}; s = \{-1\}]$$

$$[s = \emptyset; s = \{2\}]$$