Approfondimento

L'ellisse come dilatazione di una circonferenza

Consideriamo la circonferenza avente centro nell'origine e raggio r la cui equazione è

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ed applichiamo ad essa la dilatazione di equazioni $\begin{cases} x' = kx \\ y' = hy \end{cases}$ operando le sostituzioni $\begin{cases} x \to \dfrac{x}{k} \\ y \to \dfrac{y}{h} \end{cases}$

L'equazione che otteniamo è la seguente:

$\dfrac{x^2}{k^2} + \dfrac{y^2}{h^2} = r^2$ che possiamo riscrivere nella forma $\dfrac{x^2}{k^2 r^2} + \dfrac{y^2}{h^2 r^2} = 1$

Quella che abbiamo ottenuto è l'equazione di un'ellisse che ha semiasse uguale kr sull'asse x e semiasse uguale a hr sull'asse y.
Un'ellisse può quindi anche essere vista come la corrispondente di una circonferenza mediante l'applicazione di una dilatazione.
Per esempio:

- applicando alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ la dilatazione di fattori $k = 2$ e $h = 3$ otteniamo:

  sostituzioni $x \to \dfrac{x}{2}$ $y \to \dfrac{y}{3}$

  equazione $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 4$ cioè $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

  che è l'ellisse con i fuochi sull'asse y di semiassi 4 e 6 (***figura 1a***)

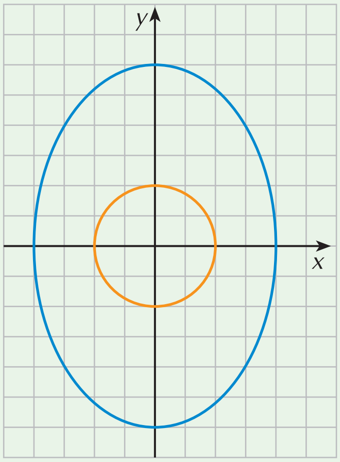
- applicando alla circonferenza $x^2 + y^2 = 16$ la dilatazione di fattori $k = \dfrac{2}{3}$ e $h = \dfrac{1}{4}$ otteniamo:

  sostituzioni $x \to \dfrac{3}{2}x$ $y \to 4y$

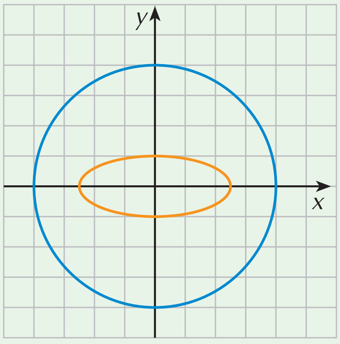
  equazione $\dfrac{9}{4}x^2 + 16y^2 = 16$ cioè $\dfrac{x^2}{\frac{64}{9}} + y^2 = 1$

  che è l'ellisse con i fuochi sull'asse x di semiassi $\dfrac{8}{3}$ e 1 (***figura 1b***).

Figura 1



a.



b.

Scrivi le equazioni delle ellissi che ottieni applicando alla circonferenza assegnata la dilatazione indicata.

1 $x^2 + y^2 = 16$ $\quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = 2y \end{cases}$ $\quad \left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{64} = 1\right]$

2 $x^2 + y^2 = 25$ $\quad \begin{cases} x' = \frac{1}{5}x \\ y' = y \end{cases}$ $\quad [25x^2 + y^2 = 25]$

3 $9x^2 + 9y^2 = 1$ $\quad \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 4y \end{cases}$ $\quad \left[x^2 + \frac{9y^2}{16} = 1\right]$

4 $x^2 + y^2 = 8$ $\quad \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x \\ y' = \frac{1}{4}y \end{cases}$ $\quad [9x^2 + 16y^2 = 8]$

5 $x^2 + y^2 = 20$ $\quad \begin{cases} x' = \frac{1}{6}x \\ y' = 3y \end{cases}$ $\quad \left[\frac{9x^2}{5} + \frac{y^2}{180} = 1\right]$

Determina le equazioni della trasformazione che, applicate alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ fanno ottenere l'ellisse assegnata.

6 **ESERCIZIO GUIDATO**

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Le sostituzioni da operare sull'equazione $x^2 + y^2 = 1$ sono $\quad x \to \frac{x}{2} \quad$ e $\quad y \to \frac{y}{3}$

Quindi le equazioni della trasformazione sono $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}$

7 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$ $\quad [x' = 4x,\ y' = 2\sqrt{2}y]$

8 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ $\quad [x' = 5x,\ y' = 4y]$

9 $\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ $\quad \left[x' = \frac{3}{2}x,\ y' = \sqrt{6}y\right]$

10 Scrivi le equazioni di una dilatazione che trasforma l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 16$. $\quad \left[x' = \frac{2}{3}x,\ y' = y\right]$