

## Problemi sulle equazioni parametriche

Le soluzioni di un'equazione letterale sono funzioni dei parametri che in essa compaiono e ci si può chiedere per quali valori di tali parametri un'equazione ha delle soluzioni che soddisfano particolari condizioni. Per esempio, data l'equazione

$$x^2 + (k - 1)x - 2k = 0$$

ci interessa sapere per quali valori di  $k$  le soluzioni sono reali coincidenti.

Si potrebbero trovare le soluzioni in funzione del parametro  $k$  e poi imporre che siano uguali, ma è molto più semplice ragionare sul discriminante: un'equazione di secondo grado ammette soluzioni reali coincidenti se  $\Delta = 0$ . Calcoliamo allora il discriminante e poniamolo uguale a zero:

$$\Delta = (k - 1)^2 + 8k = k^2 + 6k + 1 \quad \rightarrow \quad k^2 + 6k + 1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad k = -3 \pm \sqrt{9 - 1} = -3 \pm \sqrt{8} = \begin{cases} -3 - 2\sqrt{2} \\ -3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Otterremo quindi soluzioni coincidenti attribuendo a  $k$  i valori  $-3 - 2\sqrt{2}$  oppure  $-3 + 2\sqrt{2}$ .

I problemi che coinvolgono le relazioni fra i parametri di un'equazione letterale e le sue soluzioni, che indicheremo sempre con  $x_1$  e  $x_2$ , sono di diverso tipo; ce ne sono però alcuni che si possono risolvere facilmente applicando le relazioni fra i coefficienti dell'equazione e le sue soluzioni. Negli esempi che seguono ti presentiamo i casi più significativi.

### **I esempio**

Data l'equazione parametrica  $x^2 - (k - 2)x + k + 1 = 0$  determiniamo i valori di  $k$  in modo che, essendo le soluzioni reali:

- a. una radice sia l'opposto dell'altra
- b. una radice sia uguale a 2
- c. una radice sia inversa dell'altra
- d. il prodotto delle radici sia uguale a  $-6$ .

La condizione che vale per tutti i casi è che le radici siano reali; imponiamo dunque che sia  $\Delta \geq 0$  e risolviamo la disequazione ottenuta:  $(k - 2)^2 - 4(k + 1) \geq 0 \rightarrow k^2 - 8k \geq 0 \rightarrow k(k - 8) \geq 0$

Costruiamo la tabella dei segni di ciascun fattore della disequazione:

		0		8	
$k$	-		+		+
$k-8$	-		-		+
	+		-		+

Le soluzioni sono quindi reali se  $k \leq 0 \vee k \geq 8$ .

Analizziamo adesso le varie richieste tenendo presente che è  $a = 1$   $b = 2 - k$   $c = k + 1$ .

- a. Una radice è l'opposto dell'altra se  $x_1 = -x_2$  cioè se  $x_1 + x_2 = 0$ .

Ma  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ , basta quindi imporre che sia  $k - 2 = 0 \rightarrow k = 2$

Per questo valore di  $k$ , tuttavia, le soluzioni non sono reali e quindi il problema non ha soluzioni.

- b. Ricordiamo che *soluzione* di un'equazione è quel valore che sostituito all'incognita rende l'equazione una

uguaglianza vera; basta allora sostituire 2 al posto di  $x$  e risolvere l'equazione in  $k$  così ottenuta:

$$4 - 2(k - 2) + k + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad k = 9$$

Questa volta il valore trovato di  $k$  appartiene all'insieme definito dalla condizione di realtà delle radici ( $9 > 8$ ) ed è quindi la soluzione del problema.

c. Una radice è inversa dell'altra se  $x_1 = \frac{1}{x_2}$  cioè se  $x_1 \cdot x_2 = 1$

$$\text{Ma } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \text{ basta quindi imporre che sia } k + 1 = 1 \quad \rightarrow \quad k = 0$$

Per questo valore di  $k$  le soluzioni sono reali e sono anche coincidenti; ne consegue che esse devono essere entrambe uguali a 1.

d. Deve essere  $\frac{c}{a} = -6$  cioè  $k + 1 = -6 \quad \rightarrow \quad k = -7$

Anche questo valore di  $k$  è accettabile perché minore di 0.

### Il esempio

I lati di un rettangolo sono tali che la sua base supera di 8cm il lato di un quadrato e la sua altezza è uguale al lato dello stesso quadrato diminuito di 2cm. L'area del rettangolo è  $k$  volte l'area del quadrato. Quali valori può assumere il parametro  $k$  affinché il problema abbia soluzione?

Se indichiamo la misura del lato del quadrato con  $x$ , possiamo indicare la misura della base del rettangolo con  $x + 8$  e quella della sua altezza con  $x - 2$  (**figura 1**).

Esprimendo per mezzo di  $x$  la relazione fra le aree data dal problema, otteniamo

$$(x - 2)(x + 8) = kx^2$$

con la condizione  $k > 0$ , dovendo essere positiva l'espressione di un'area.

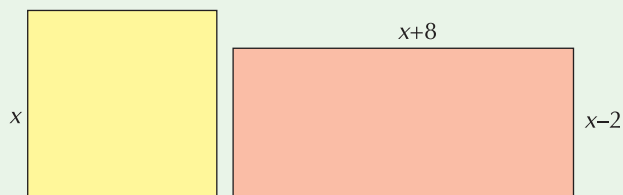
$$\text{Svolgendo i calcoli otteniamo: } kx^2 = x^2 - 2x + 8x - 16 \quad \rightarrow \quad (k - 1)x^2 - 6x + 16 = 0$$

Affinché il problema abbia soluzione occorre che sia  $\Delta \geq 0$ , quindi, usando la formula ridotta, abbiamo:

$$\frac{\Delta}{4} = 9 - 16(k - 1) \geq 0 \quad \rightarrow \quad 9 - 16k + 16 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -16k + 25 \geq 0 \quad \rightarrow \quad k \leq \frac{25}{16}$$

In definitiva, tenendo conto della condizione iniziale, deve essere  $0 < k \leq \frac{25}{16}$ .

Figura 1



## ESERCIZI

1 Data l'equazione  $\frac{x(x-1)-m-1}{(x-1)(m-1)} = \frac{x}{m}$  determina il valore di  $m$  in modo che le sue soluzioni siano coincidenti.

$$\left[ m = -\frac{1}{2} \right]$$

**2** Determina il valore del parametro  $k$  affinché l'equazione  $x^2 + kx + 2k = 0$  abbia soluzioni reali.  
[ $k \leq 0 \vee k \geq 8$ ]

**3** Determina per quali valori di  $k$  l'equazione  $(k + 1)x^2 - (k - 2)x + 1 = 0$  non ha soluzioni reali.  
[ $0 < k < 8$ ]

**4** Determina per quali valori di  $k$  l'equazione  $kx^2 - (2k + 1)x + k + 2 = 0$  ammette due soluzioni reali distinte.  
[ $k < \frac{1}{4}$ ]

**5** Determina per quali valori del parametro  $k$  le seguenti equazioni ammettono soluzioni reali:

a.  $x^2 - 3x + k = 0$  [  $k \leq \frac{9}{4}$  ]

b.  $2x^2 - 5x - 2k = 0$ . [  $k \geq -\frac{25}{16}$  ]

**6** Determina per quali valori del parametro  $m$  le seguenti equazioni ammettono soluzioni non reali:

a.  $2mx^2 - 3x + 1 = 0$  [  $m > \frac{9}{8}$  ]

b.  $x^2 - 2(m + 1)x + 16 = 0$ . [  $-5 < m < 3$  ]

*Trova i valori dei parametri in modo che le soluzioni di ciascuna delle seguenti equazioni siano reali e soddisfino le condizioni indicate.*

**7** Data l'equazione  $(a - 2)x^2 + (a + 1)x - a = 0$ , determina per quali valori del parametro  $a$  essa ammette in  $R$ :

a. soluzioni coincidenti [  $a = \frac{1}{5} \vee a = 1$  ]

b. una soluzione uguale a 2 [  $a = \frac{6}{5}$  ]

c. due soluzioni opposte. [  $a = -1$  ]

**8** Determina il valore del parametro  $b$  in modo che l'equazione  $(b^2 - 4)x^2 - 2bx + 1 = 0$ :

a. abbia il prodotto delle soluzioni uguale a  $-\frac{9}{32}$  [  $b = \pm \frac{2}{3}$  ]

b. abbia la somma dei reciproci delle soluzioni uguale a 4 [  $\nexists b$  ]

c. abbia una soluzione uguale a 1 [  $b = -1 \vee b = 3$  ]

d. sia di primo grado. [  $b = 2 \vee b = -2$  ]

(Suggerimento: **b.**  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  è la somma dei reciproci delle soluzioni che può anche essere scritta così  $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$ , quindi...)

**9** Nell'equazione  $x^2 - 2x + 3k = 0$ , trova il valore del parametro  $k$  affinché:

a. le soluzioni siano reali [  $k \leq \frac{1}{3}$  ]

b. l'equazione sia di primo grado [  $\nexists k \in R$  ]

c. la somma dei cubi delle radici sia uguale a 2 [  $k = \frac{1}{3}$  ]

(Suggerimento:  $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$ )

- 10** Data l'equazione  $8x^2 - (k-1)x + k - 7 = 0$  ed indicate con  $x_1$  e  $x_2$  le sue soluzioni, determina il valore di  $k$  in modo che sia:
- a.  $x_1 = x_2$                       b.  $x_1 = -\frac{1}{x_2}$                       [a.  $k = 25 \vee k = 9$ ; b.  $k = -1$ ]  
c.  $x_1 = -3$                       d.  $x_1 = -x_2$                       [c.  $k = -\frac{31}{2}$ ; d.  $k = 1$ ]
- 11** Nell'equazione  $4x^2 - 4mx + m^2 - 9 = 0$ , determina il valore del parametro  $m$  in modo che siano verificate le seguenti condizioni:
- a.  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{2}$                       b.  $x_1 = \frac{3}{4x_2}$                       c.  $x_1 = 0$                       [a.  $m = -9 \vee m = 1$ ; b.  $m = \pm 2\sqrt{3}$ ; c.  $m = \pm 3$ ]
- 12** Nell'equazione  $x^2 - (k+1)x + k = 0$ , determina il valore del parametro  $k$  in modo che siano verificate le seguenti condizioni:
- a.  $x_1 = x_2$                       b.  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$                       [a.  $k = 1$ ; b.  $k = \frac{1}{2}$ ]
- 13** Nell'equazione  $x^2 + 2(k-2)x + 1 = 0$  determina il valore del parametro  $k$  in modo che:
- a.  $x_1 = \frac{1}{2}$                       b.  $x_1 = 9 - x_2$                       [a.  $k = \frac{3}{4}$ ; b.  $k = -\frac{5}{2}$ ]  
c.  $x_1^2 + x_2^2 = 14$                       d.  $\frac{1}{x_1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{x_2}$                       [c.  $k = 0 \vee k = 4$ ; d.  $\nexists k$ ]
- 14** Determina il valore del parametro  $k$  affinché l'equazione  $kx^2 - (k-2)x + k - 1 = 0$  abbia:
- a. radici coincidenti                      [c.  $k = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ]  
b. la somma delle radici uguale a 2                      [c.  $\nexists k$ ]  
c. soluzioni reciproche                      [c.  $\nexists k$ ]  
d. la somma dei reciproci delle radici uguale a 3                      [c.  $k = \frac{1}{2}$ ]
- 15** Nell'equazione  $(3-m)x^2 + 2(m+1)x - m - 3 = 0$  determina il valore del parametro  $m$  affinché siano verificate le seguenti condizioni:
- a.  $x_1 = 4$                       b.  $x_1 = -x_2$                       c.  $x_1 = \frac{4}{x_2}$                       [a.  $m = \frac{53}{9}$ ; b.  $m = -1$ ; c.  $m = 5$ ]
- 16** Data l'equazione  $2ax^2 + x + a = 0$ , determina il valore di  $a$  in modo che si abbia:
- a.  $x_1 = x_2$                       b.  $x_1 = \frac{1}{3}$                       [a.  $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$ ; b.  $a = -\frac{3}{11}$ ]  
c.  $x_1^2 + x_2^2 = 5$                       d.  $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{2}$                       [c.  $a = \pm \frac{\sqrt{6}}{12}$ ; d.  $\nexists a$ ]
- 17** Data l'equazione  $x^2 - (m-1)x - \frac{1}{4}(2m-1) = 0$  determina il valore di  $m$  in modo che:
- a.  $x_1 = -x_2$                       b.  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{3}$                       [a.  $m = 1$ ; b.  $m = \frac{11}{10}$ ]
- 18** Data l'equazione  $3kx^2 + (1-5k)x - 2(k+1) = 0$  determina il valore di  $k$  in modo che sia:
- a.  $x_1 = 0$                       b.  $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = -\frac{1}{2}$                       [a.  $k = -1$ ; b.  $k = \frac{1}{3}$ ]  
c.  $x_1 = 4 - x_2$                       d.  $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{2}$                       [c.  $k = -\frac{1}{7}$ ; d.  $k = -\frac{1}{7} \vee k = \frac{1}{5}$ ]

**19** Data l'equazione  $kx^2 - kx + k + 2 = 0$ , determina il valore di  $k$  in modo che:

a. le soluzioni siano coincidenti

$$\left[ k = -\frac{8}{3} \right]$$

b. il prodotto delle soluzioni sia uguale alla metà della loro somma

$$[\exists k]$$

c. la somma delle soluzioni sia uguale a 1.

$$[\forall k \in \mathbb{R} - \{0\}]$$

**20** Nell'equazione  $kx^2 - (2k + 1)x + k = 0$ , determina il valore del parametro  $k$  affinché siano verificate le seguenti condizioni:

a.  $3x_1x_2 = x_1 + x_2$     b.  $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = \frac{2}{5}$     c.  $x_1^2 + x_2^2 = 2$      $\left[ \text{a. } k = 1; \text{ b. } \exists k \in \mathbb{R}; \text{ c. } k = -\frac{1}{4} \right]$

**21** Determina il valore del parametro  $k$ , affinché l'equazione  $(k - 2)x^2 + (2k - 3)x + 1 + k = 0$  abbia:

a. la somma degli inversi delle radici uguale a 1

$$\left[ k = \frac{2}{3} \right]$$

b. la somma dei quadrati delle radici uguale a 2

$$[\exists k \in \mathbb{R}]$$

**22** Trova il valore di  $m$  in modo che l'equazione  $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ :

a. abbia radici reali distinte

$$[\forall m \in \mathbb{R}]$$

b. abbia radici reali coincidenti

$$[\exists m \in \mathbb{R}]$$

c.  $x_1^2 - 3x_1 + x_2^2 - 3x_2 = 0$

$$\left[ \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4} \right]$$

**23** Trova i valori del parametro  $a$  per i quali l'equazione  $(1 - 2a)x^2 + (2a + 1)x - (2a - 1) = 0$  soddisfa le seguenti condizioni:

a.  $x_1 = -2$     b.  $x_1x_2(x_1 + x_2) = 6$     c.  $x_1 = 0 \wedge x_2 = 1$      $\left[ \text{a. } a = \frac{3}{14}; \text{ b. } a = \frac{7}{10}; \text{ c. } \exists a \in \mathbb{R} \right]$

**24** Nell'equazione  $x^2 - (k + 3)x + 3k = 0$  determina il valore del parametro  $k$  in modo che siano verificate le seguenti condizioni:

a.  $x_1 = \sqrt{2} - 1$     b.  $x_1 + x_2 = \frac{x_1x_2}{5}$     c.  $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 + x_2} = 7$

$$\left[ \text{a. } k = \sqrt{2} - 1; \text{ b. } k = -\frac{15}{2}; \text{ c. } k = 1 \vee k = 2 \right]$$

**25** Considerata l'equazione  $(2 - k)x^2 - 2(k + 1)x - k = 0$ , determina il valore del parametro reale  $k$  in modo che:

a. la somma delle radici sia maggiore di  $-3$

$$\left[ -\frac{1}{4} \leq k < 2 \vee k > 8 \right]$$

b. il prodotto delle radici sia minore di 1

$$\left[ -\frac{1}{4} \leq k < 2 \right]$$

c. la somma dei reciproci delle radici sia maggiore di  $\frac{1}{2}$

$$\left[ -\frac{1}{4} \leq k < 0 \right]$$