

Concetti chiave e regole

L'iperbole e la sua equazione

L'iperbole è il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

L'equazione di un'iperbole che ha centro nell'origine e assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani è

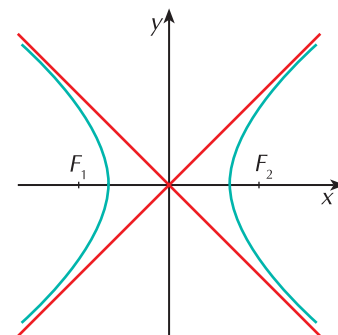
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se i fuochi appartengono all'asse delle ascisse
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ se i fuochi appartengono all'asse delle ordinate

Le caratteristiche di un'iperbole

Le caratteristiche di un'iperbole si possono ricavare dalla sua equazione:

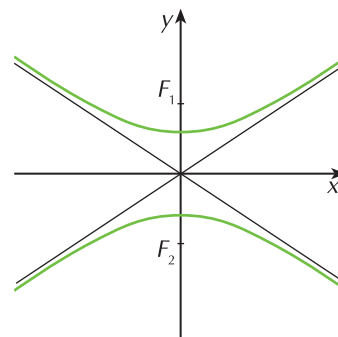
■ nel caso dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

- a rappresenta il semiasse trasverso
- b rappresenta il semiasse non trasverso
- i vertici reali sono i punti di coordinate $(-a, 0)$ $(a, 0)$
- i vertici immaginari sono i punti di coordinate $(0, -b)$ $(0, b)$
- i fuochi sono i punti di coordinate $(\pm c, 0)$ dove $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- gli asintoti hanno equazione $y = \pm \frac{b}{a}x$



■ nel caso dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$:

- b rappresenta il semiasse trasverso
- a rappresenta il semiasse non trasverso
- i vertici reali sono i punti di coordinate $(0, -b)$ $(0, b)$
- i vertici immaginari sono i punti di coordinate $(-a, 0)$ $(a, 0)$
- i fuochi sono i punti di coordinate $(0, \pm c)$ dove $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
- gli asintoti hanno equazione $y = \pm \frac{b}{a}x$



L'eccentricità

L'**eccentricità** e di un'iperbole è definita come il rapporto fra la semidistanza focale c ed il semiasse trasverso:

$$e = \frac{\text{semiasse focale}}{\text{semiasse trasverso}} = \begin{cases} \frac{c}{a} & \text{se i fuochi appartengono all'asse } x \\ \frac{c}{b} & \text{se i fuochi appartengono all'asse } y \end{cases}$$

Essa rappresenta l'ampiezza dell'iperbole ed è un numero reale maggiore di 1.

Le rette tangenti

Per trovare l'equazione della **retta tangente** ad un'iperbole si deve:

- scrivere l'equazione generale della retta
- impostare il sistema fra l'equazione dell'iperbole e l'equazione della retta
- trovare l'equazione risolvente del sistema
- calcolare il discriminante di questa equazione e imporre che sia uguale a zero.

In particolare, se la retta tangente passa per un punto $P(x_0, y_0)$ che appartiene all'iperbole, oltre al metodo illustrato si possono usare le formule di sdoppiamento ponendo nell'equazione dell'iperbole:

x_0x al posto di x^2

y_0y al posto di y^2

L'iperbole equilatera

Se in un'iperbole $a = b$, essa si dice **equilatera** e la sua equazione diventa:

- equazione riferita al centro e agli assi:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{se i fuochi sono sull'asse } x \rightarrow F(\pm a\sqrt{2}, 0) \quad \text{asintoti } y = \pm x$$

$$x^2 - y^2 = -a^2 \quad \text{se i fuochi sono sull'asse } y \rightarrow F(0, \pm a\sqrt{2}) \quad \text{asintoti } y = \pm x$$

- equazione riferita agli asintoti:

$$xy = h \quad \text{se gli asintoti coincidono con gli assi cartesiani}$$

La curva ha vertici e fuochi di coordinate:

$$- \text{ se } h > 0 \quad V(\pm\sqrt{h}, \pm\sqrt{h}) \quad F(\pm\sqrt{2h}, \pm\sqrt{2h})$$

$$- \text{ se } h < 0 \quad V(\pm\sqrt{-h}, \mp\sqrt{-h}) \quad F(\pm\sqrt{-2h}, \mp\sqrt{-2h})$$

La curva di equazione $xy = h$ è il grafico della proporzionalità inversa.

L'eccentricità di un'iperbole equilatera è sempre $e = \sqrt{2}$.

L'iperbole traslata

Traslando un'iperbole riferita al centro e agli assi di un vettore $\vec{v}(h, k)$ si ottiene un'iperbole che ha centro di simmetria nel punto di coordinate (h, k) e assi paralleli a quelli cartesiani che, a seconda dei casi, ha equazione:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = -1$$

Traslando un'iperbole equilatera riferita agli asintoti si ottiene una nuova iperbole la cui equazione ha la forma

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{con } c \neq 0 \quad \wedge \quad ad - bc \neq 0$$

Essa prende il nome di **funzione omografica** e l'iperbole da essa rappresentata ha per asintoti le rette

$$y = \frac{a}{c} \quad \text{e} \quad x = -\frac{d}{c}$$