

Il valore di un prestito: nuda proprietà e usufrutto

Una volta calcolato il piano di ammortamento, può capitare di dover valutare un prestito sulla base di un altro tasso di interesse i' , diverso dal tasso i a cui è stata fatta l'operazione. Questo è il caso della *cessione di un prestito*, cioè la "vendita" del credito ad una terza persona, la quale pagherà una certa somma per avere quel credito, da valutare in base ad un tasso diverso da quello a cui è avvenuto il prestito.

Pensiamo per esempio ad un'azienda che vanta dei crediti da parte di un cliente con il quale ha concordato un piano rateizzato di pagamento; se l'azienda ha bisogno di capitale liquido, cede alla Banca il credito ad un tasso che di solito è minore di quello usato per l'ammortamento.

Il valore di un prestito, detto anche **valore di riscatto**, a un fissato tempo k , è il valore attuale V_k di tutte le somme che devono essere ancora versate a saldo del debito, valutate ad un tasso i' detto **tasso di valutazione**.

In particolare, suddividendo le somme che contribuiscono a costituire il capitale prestato da quelle che formano gli interessi, chiamiamo:

- **nuda proprietà** il valore attuale P_k delle quote di capitale che devono ancora essere rimborsate al tempo k
- **usufrutto** il valore attuale U_k delle quote di interesse che devono ancora essere versate al tempo k .

Il valore del prestito è quindi la somma di nuda proprietà e usufrutto: $V_k = P_k + U_k$.

La determinazione del valore di riscatto avviene con modalità diverse a seconda della forma di restituzione concordata; vediamo come procedere nei casi più significativi.

Il rimborso globale

In questo tipo di rimborso capitale e interessi vengono pagati in un'unica soluzione, entrambi alla scadenza. Il valore di riscatto V_k si ottiene calcolando il montante al tempo n , utilizzando il tasso i concordato per il prestito, e attualizzando tale somma al tempo $n - k$ al tasso i' .

La nuda proprietà P_k è il valore attuale al tempo k del capitale C avuto in prestito, al tasso di valutazione i' . L'usufrutto U_k si ottiene dalla differenza tra il valore di riscatto e la nuda proprietà.

In sintesi:

$$V_k = C(1 + i)^n \cdot (1 + i')^{-(n-k)} \quad P_k = C(1 + i')^{-(n-k)} \quad U_k = V_k - P_k$$

Esempio

Abbiamo chiesto in prestito € 20000 al tasso annuo del 9% con l'impegno di restituire capitale e interessi fra 10 anni. Calcoliamo il valore del prestito, la nuda proprietà e l'usufrutto alla fine del sesto anno ad un tasso di valutazione del 7%.

Applichiamo le formule:

$$V_6 = 20000(1 + 0,09)^{10}(1 + 0,07)^{-(10-6)} = 36121,01(\text{€})$$

$$P_6 = 20000(1 + 0,07)^{-(10-6)} = 15257,90(\text{€})$$

$$U_6 = 36121,01 - 15257,90 = 20863,11(\text{€})$$

Il rimborso globale con pagamento periodico degli interessi

In questo tipo di rimborso il capitale avuto in prestito viene rimborsato alla scadenza mentre gli interessi vengono pagati periodicamente.

La nuda proprietà P_k è il valore attuale al tempo k del capitale C avuto in prestito, al tasso di valutazione i' :

$$P_k = C(1 + i')^{-(n-k)}$$

L'usufrutto U_k è il valore attuale al tempo k delle restanti quote interesse ancora da pagare, al tasso di valutazione i' ; esse costituiscono una rendita di $n - k$ rate di importo $R = C \cdot i$:

$$U_k = C \cdot i \cdot a_{\overline{n-k}|i'}$$

Il valore di riscatto è quindi dato da: $V_k = C(1 + i')^{-(n-k)} + C \cdot i \cdot a_{\overline{n-k}|i'}$

Esempio

Riprendiamo l'esempio precedente supponendo la restituzione con rimborso globale e pagamento periodico degli interessi:

$$P_6 = 20000(1 + 0,07)^{-(10-6)} = 15257,90(\text{€})$$

$$U_6 = 20000 \cdot 0,09 \cdot \frac{1 - (1 + 0,07)^{-(10-6)}}{0,07} = 1800 \cdot \frac{1 - (1 + 0,07)^{-4}}{0,07} = 6096,98(\text{€})$$

$$V_6 = 15257,90 + 6096,98 = 21354,88$$

Notiamo che il valore del prestito è sensibilmente inferiore a quello dell'esempio precedente in quanto parte degli interessi sono stati già pagati.

L'ammortamento progressivo

In questo tipo di rimborso le n rate sono costanti e sono formate da una quota capitale e una quota interesse variabili da rata a rata; l'importo costante della rata è dato dalla relazione:

$$R = \frac{C \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Il valore del debito dopo il pagamento delle prime k , è il valore attuale delle restanti rate valutate al tasso i' :

$$V_k = R \cdot a_{\overline{n-k}|i'} = \frac{C \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}} \cdot \frac{1 - (1 + i')^{-(n-k)}}{i'}$$

Per calcolare la nuda proprietà e l'usufrutto si usa una comoda relazione che prende il nome di *formula di Achard-Makeham* che lega tra loro il debito residuo, la nuda proprietà e l'usufrutto di un dato periodo k :

$$D_k = U_k \cdot \frac{i'}{i} + P_k$$

La nuda proprietà è il valore attuale delle rimanenti quote capitale; utilizzando questa formula si dimostra che:

$$P_k = R \cdot \frac{(1 + i)^{-(n-k)} - (1 + i')^{-(n-k)}}{i' - i}$$

L'usufrutto è la differenza, quindi: $U_k = V_k - P_k$.

Esempio

Un'azienda ha contratto un prestito di € 80000, estinguibile in 20 anni al tasso annuo del 5%, rimborsabile con ammortamento progressivo. Calcoliamo il valore del prestito, la nuda proprietà e l'usufrutto alla fine del quindicesimo anno, sapendo che il tasso di valutazione è del 4%.

$$\text{Calcoliamo la rata costante da pagare annualmente: } R = \frac{80000 \cdot 0,05}{1 - (1 + 0,05)^{-20}} = 6419,41(\text{€})$$

Il valore del prestito è il valore attuale delle ultime $20 - 15 = 5$ rate al tasso di valutazione del 4%:

$$V_{15} = 6419,41 \cdot \frac{1 - (1 + 0,04)^{-5}}{0,04} = 28578,07(\text{€})$$

Per il calcolo della nuda proprietà alla fine del quindicesimo anno applichiamo la formula:

$$P_{15} = 6419,41 \cdot \frac{(1 + 0,05)^{-5} - (1 + 0,04)^{-5}}{0,04 - 0,05} = 24651,14(\text{€})$$

$$\text{Valutiamo infine l'usufrutto: } U_{15} = 28578,07 - 24651,14 = 3926,93(\text{€})$$

L'ammortamento uniforme

Nell'ammortamento uniforme le quote capitale Q sono costanti e uguali a $\frac{C}{n}$.

La nuda proprietà è quindi data da: $P_k = \frac{C}{n} \cdot a_{\overline{n-k}|i'}$

Per il calcolo dell'usufrutto ricorriamo di nuovo alla formula di Achard-Makeam nella quale D_k rappresenta il debito residuo:

$$D_k = U_k \cdot \frac{i'}{i} + P_k \quad \rightarrow \quad U_k = (D_k - P_k) \cdot \frac{i}{i'}$$

Essendo poi $D_k = \frac{C}{n} \cdot (n - k)$, ricaviamo che:

$$U_k = \left[\frac{C}{n} \cdot (n - k) - \frac{C}{n} \cdot a_{\overline{n-k}|i'} \right] \cdot \frac{i}{i'} = \frac{C}{n} \cdot \frac{i}{i'} \cdot \left(n - k - a_{\overline{n-k}|i'} \right)$$

Esempio

Riprendiamo l'esempio precedente supponendo questa volta un ammortamento uniforme.

$$\text{Calcoliamo la quota capitale: } \frac{C}{n} = \frac{80000}{20} = 4000(\text{€})$$

Applichiamo le formule con $k = 15$:

$$P_{15} = 4000 \cdot a_{\overline{5}|0,04} = 4000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,04)^{-5}}{0,04} = 17807,29(\text{€})$$

$$U_k = 4000 \cdot \frac{0,05}{0,04} \cdot \left(20 - 15 - \frac{1 - (1 + 0,04)^{-5}}{0,04} \right) = 2740,89(\text{€})$$

$$V_{15} = 17807,29 + 2740,89 = 20548,18(\text{€})$$

ESERCIZI

- 1** Gaia ha contratto un debito di € 30000, al tasso annuo del 9%, estinguibile in 9 anni con rimborso globale. Calcola il valore del prestito, la nuda proprietà e l'usufrutto alla fine del 5° anno ad un tasso di valutazione del 7,5%.
[$V_5 = 48789,45€$; $P_5 = 22464,02€$; $U_5 = 26325,42€$]
- 2** Un debito di € 100000 è stato contratto al tasso del 5% e la durata è di 10 anni. Calcola V_4 , P_4 , U_4 ad un tasso di valutazione del 7% nei seguenti casi:
- a. rimborso globale con pagamento periodico degli interessi
[$V_4 = 90466,92$; $P_4 = 66634,22$; $U_4 = 23832,70$]
- b. ammortamento progressivo
[$V_4 = 61728,88$; $P_4 = 51719,71$; $U_4 = 10009,17$]
- c. ammortamento uniforme
[$V_4 = 56475,83$; $P_4 = 47665,40$; $U_4 = 8810,43$]
- 3** Tre anni fa è stato concesso un prestito al tasso annuo del 6%, rimborsabile in 10 anni, mediante rate annue costanti di € 2000; oggi si vuole valutare il prestito al tasso annuo del 5%. Calcola l'ammontare del prestito e il suo valore odierno.
[€ 14720,17; € 11572,75]
- 4** Un prestito di € 12000 è ammortizzabile col metodo progressivo in 15 anni al tasso annuo del 7%. Sapendo che il valore del prestito alla fine dell'ottavo anno è di € 6631,09, calcola il tasso di valutazione.
[9%]
- 5** Un prestito di € 10000 è ammortizzabile con metodo progressivo in 12 anni al tasso annuo del 5%; dopo 4 anni il valore del prestito è di € 7006,19 e, alla stessa epoca, l'usufrutto è di € 3552,76. Calcola il tasso annuo di valutazione e la nuda proprietà dopo il versamento dell'ottava rata.
[6%; € 3453,43]
- 6** Davide ha ricevuto in prestito la somma di € 7000 al tasso annuo nominale convertibile semestralmente del 14%, da rimborsare in 18 semestri mediante rate semestrali costanti. Calcola il valore del prestito dopo il versamento della decima rata, la nuda proprietà e l'usufrutto dopo il versamento della nona rata ad un tasso di valutazione del 6% annuo.
Se applicassimo un tasso di valutazione annuo superiore al 6%, il valore del prestito risulterebbe maggiore o minore rispetto a quello calcolato con il tasso al 6% annuo? [€ 4321,32; € 3337,81; € 1395,41]
- 7** Un prestito contratto al tasso annuo del 6%, è rimborsabile mediante 16 rate costanti annue di € 2000 ciascuna. Calcola l'ammontare del prestito.
Calcola inoltre la nuda proprietà, il valore del prestito e l'usufrutto dopo il nono versamento con tasso annuo di valutazione del
- a. 6%
b. 8%. [€ 20211,79; a. € 8783,77; € 11164,76; € 2381,02; b. € 8156,67; € 10412,74; € 2256,07]
- 8** Un prestito di € 12000 è ammortizzabile in 10 anni con rate costanti al tasso annuo del 3%. Calcola la nuda proprietà dopo 5 anni ad un tasso di valutazione del 3% annuo.
[€ 5890,69]
- 9** Un prestito di € 15000 deve essere rimborsato con il pagamento di 15 rate annue costanti al tasso annuo dell'8%. Dopo il pagamento della decima rata il debito viene riscattato. Calcola il valore di riscatto sapendo che il tasso applicato è del 7% annuo.
[€ 7185,36]
- 10** Ho avuto in prestito la somma di € 9000, al tasso annuo del 9%, che mi impegno a restituire in 9 rate annue costanti. Dopo il pagamento della quarta rata chiedo però il riscatto del prestito ed estinguo il debito pagando € 6155,17. Quale tasso annuo di riscatto è stato applicato?
[7%]
- 11** Un prestito di € 10500 è rimborsabile con ammortamento progressivo in 10 anni con rate semestrali al tasso del 12% annuo convertibile semestralmente. Viene riscattato al settimo anno pagando un valore di riscatto di € 3986,97. Calcola il tasso di riscatto semestrale.
[10%]