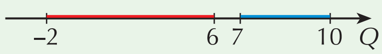
APPROFONDIMENTO

La definizione di numero reale

Chiamiamo **classe** un qualunque insieme di numeri reali.

Due classi A e B di numeri razionali si dicono **separate** se tutti i numeri della prima classe sono minori o tutt'al più uguali di quelli della seconda; questo significa che le due classi o non hanno elementi in comune, oppure ne hanno uno solo.
Per esempio sono separate le classi (osserva le figure a lato):

$A = \{x \in Q \mid -2 < x < 6\}$ e $B = \{x \in Q \mid 7 < x < 10\}$

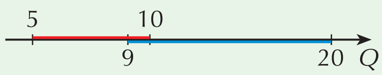


$C = \{x \in Q \mid 3 < x < 20\}$ e $D = \{x \in Q \mid 20 \leq x < 100\}$

$E = \{x \in Q \mid -10 < x \leq -1\}$ e $F = \{x \in Q \mid x \geq -1\}$

non sono separate le classi:

$H = \{x \in Q \mid 5 < x < 10\}$ e $K = \{x \in Q \mid 9 < x < 20\}$



Quando due classi sono separate, può darsi che esista un numero razionale che è contemporaneamente maggiore o uguale di tutti i numeri di A e minore o uguale di tutti i numeri di B; un numero che soddisfa a questa proprietà si dice **numero separatore** delle due classi.
Per esempio, le classi A e B precedenti hanno come numero separatore un qualsiasi numero compreso fra 6 e 7; le classi C e D hanno come numero separatore 20; invece le classi

$P = \{x \in Q^+ \mid x^2 < 3\}$ e $S = \{x \in Q^+ \mid x^2 > 3\}$

(in P ci sono tutti i numeri razionali positivi il cui quadrato è minore di 3; in S ci sono tutti i numeri razionali positivi il cui quadrato è maggiore di 3) non hanno numero separatore perché non esiste un numero razionale il cui quadrato è 3.
Infine due classi di numeri razionali si dicono **indefinitamente ravvicinate** se, comunque fissato un numero $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un numero in A ed un numero in B in modo che la loro differenza, in modulo, sia minore di ε.
Le classi C e D, E e F, P e S degli esempi precedenti sono indefinitamente ravvicinate, le classi A e B non lo sono.

Le definizioni ricordate finora portano ad enunciare il concetto di classi contigue di numeri razionali.

Due classi A e B di numeri razionali costituiscono una coppia di **classi contigue** (A, B) se:

- nessuna delle due classi è vuota
- sono separate, cioè $\forall a \in A \wedge \forall b \in B, \quad a \leq b$
- sono indefinitamente ravvicinate, cioè
  $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \wedge \exists b \in B$ tali che $|a - b| < \varepsilon$.

Le coppie di classi contigue hanno la caratteristica di ammettere al più un solo numero separatore; infatti, se ne avessero due, chiamiamoli p e q, le due classi non sarebbero indefinitamente ravvicinate (basterebbe scegliere $\varepsilon < |p - q|$).

Si definisce allora il numero reale attraverso le coppie di classi contigue:

si dice numero reale ogni coppia di classi contigue di numeri razionali.

A questo punto, se la coppia ha elemento separatore (uno solo) allora il numero definito è razionale; se non c'è elemento separatore il numero definito è irrazionale.
Per esempio, la classe A dei numeri approssimati per difetto di $\frac{5}{3}$ e la classe B dei numeri approssimati per eccesso di $\frac{5}{3}$

$$A = \{1; 1{,}6; 1{,}66; 1{,}666; .....\} \quad \text{e} \quad B = \{2; 1{,}7; 1{,}67; 1{,}667; ....\}$$

costituiscono una coppia di classi contigue che ha $\frac{5}{3}$ come elemento separatore: $\frac{5}{3}$ è un numero razionale.

Le classi $P = \{x \in Q^+ \mid x^2 < 3\}$ e $S = \{x \in Q^+ \mid x^2 > 3\}$
sono una coppia di classi contigue che non ammette elemento separatore: il numero il cui quadrato è 3, cioè $\sqrt{3}$ è un numero irrazionale.