Matematica in laboratorio

1. La parabola con GeoGebra

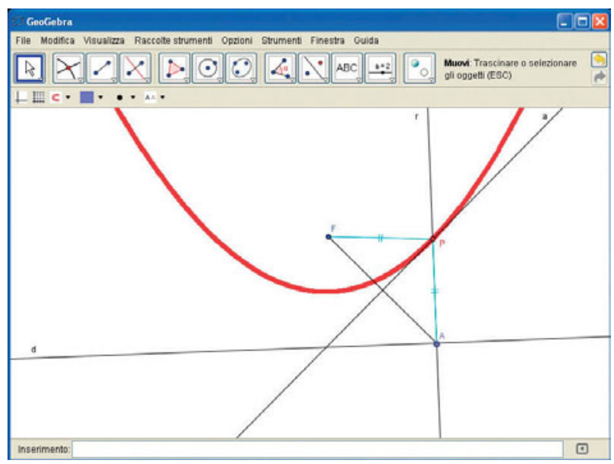
Dopo aver avviato il programma, chiudiamo la *Vista Algebra*, togliamo gli assi cartesiani e la griglia da quella grafica in modo da lavorare inizialmente nel piano euclideo. Affrontiamo poi i seguenti passi:

- disegniamo il punto F e la retta direttrice d;
- prendiamo un punto A su d e da esso tracciamo la perpendicolare r a d stessa;
- tracciamo il segmento FA e costruiamo il suo asse a;
- troviamo il punto P di intersezione delle rette a e r;
- dalla scheda delle **Proprietà** di P che si apre con il tasto destro del mouse attiviamo con un clic la voce **Traccia attiva**.

In modalità *1-Muovi*, muoviamo adesso lentamente il punto A sulla retta d; contemporaneamente il punto P si muove descrivendo una curva che è il luogo che stiamo cercando. Infatti, i segmenti PF e PA, appartenendo P all'asse del segmento AF, sono congruenti al variare del punto A su d.

La traccia lasciata dal punto P non è continua e non è permanente (se memorizzi la costruzione in un file e poi lo riapri, la traccia scompare); non solo, in realtà con questo metodo non abbiamo tracciato un luogo ma solo una parte di esso perché abbiamo fatto muovere il punto A su di un segmento anziché su tutti i punti dell'intera retta d.

Per avere un tracciato definitivo e completo occorre usare lo strumento *4-luogo*, indicando P come primo punto e A come secondo:



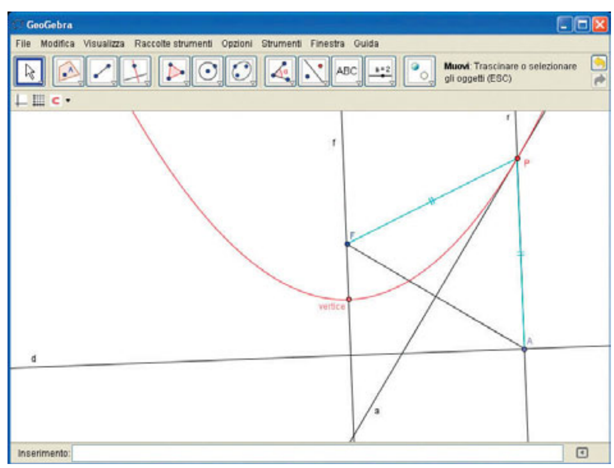
Luogo[*P*, *A*]

Studiamo le caratteristiche della curva ottenuta facendo riferimento alla figura successiva.

- La retta f che passa per il fuoco ed è perpendicolare alla direttrice è asse di simmetria per la curva.

Per verificarlo basta trovare il simmetrico P' del punto P rispetto a f; quando P scorre in uno dei rami della curva, P' scorre sul ramo opposto.

- Tra tutti i punti della curva ottenuta, quello di intersezione dell'asse di simmetria con la parabola ha un ruolo particolare e viene chiamato **vertice**. Esso rappresenta il punto "più basso" della parabola (o "più alto" se la direttrice si trova al di sopra del fuoco).



2. L'equazione e le sue caratteristiche

Gli slider di GeoGebra

Uno slider è un numero, oppure un angolo, il cui valore può variare in un fissato intervallo $[a, b]$ assumendo valori che, a partire da a, vengono incrementati di un passo costante fino a b.

Per esempio, se si fissa come intervallo [1, 4] e il passo di incremento è 0,5, i valori che lo slider assume sono

$$1 \quad 1{,}5 \quad 2 \quad 2{,}5 \quad 3 \quad 3{,}5 \quad 4$$

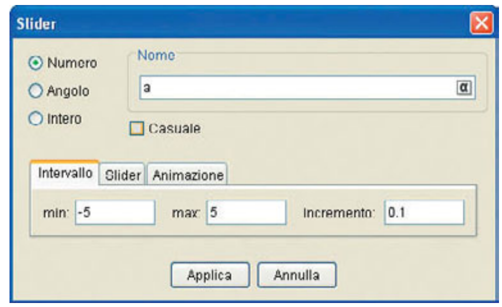
Uno slider viene usato quando si vuole far dipendere una costruzione da un parametro variabile.
L'attivazione di questo strumento può avvenire con due procedure diverse.

Prima procedura

Dalla barra degli Strumenti di disegno si usa il comando *10-Slider* che, cliccando in un punto della finestra grafica, fa aprire una finestra di dialogo come quella in figura. In essa si deve:

- specificare se il parametro variabile è un numero oppure un angolo
- dare un nome al parametro
- completare la scheda *Intervallo* indicando il valore minimo e il valore massimo dell'intervallo e il passo di incremento.

L'aspetto grafico di uno slider è un segmento con un punto mobile in evidenza.



Seconda procedura

Attraverso la Barra di Inserimento si dichiara una variabile con un valore iniziale, per esempio $k = 1$.
Nella *Vista Algebra* questa variabile è contraddistinta da un cerchietto di colore bianco.
Si devono adesso affrontare i seguenti passi:

- cliccare sulla dichiarazione di k con il tasto destro del mouse
- spuntare la voce *Mostra oggetto*

oppure:

- cliccare sul cerchietto bianco.

In questo modo k diventa uno slider e il cerchietto cambia colore. Per fissare l'intervallo di variabilità basta adesso cliccare con il tasto destro del mouse sulla sua dichiarazione nella *Vista Algebra* e selezionare *proprietà* oppure sul segmento che lo rappresenta nella *Vista Grafica* e impostare le caratteristiche dalla scheda *Slider* della voce *Proprietà*.
L'aspetto grafico può essere modificato da orizzontale a verticale attraverso la voce *Slider* che si trova appena sotto quella *Intervallo*.
La voce *Animazione*, quando è attivata, consente di fissare le modalità di variazione automatica del parametro in modo che sia *Oscillante* (da a a b e viceversa), *Crescente* (sempre da a verso b), *Decrescente* (sempre da b verso a).
Facendo scorrere, mediante trascinamento in avanti e indietro, il punto mobile, si ottengono le variazioni programmate del parametro.

Le caratteristiche della parabola

Studiamo come varia il grafico della parabola di equazione $y = kx^2$ al variare di k in R.

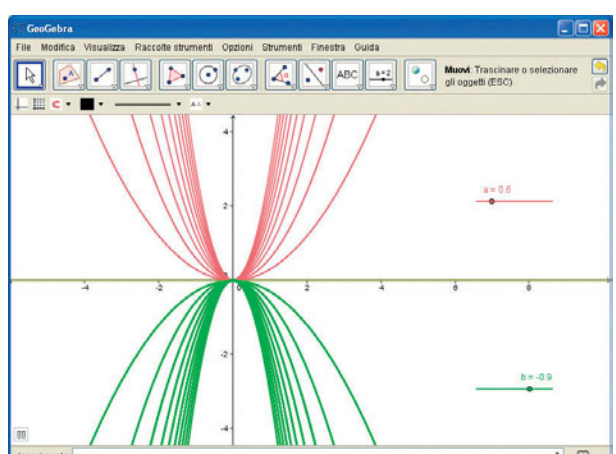
Per far variare k definiamo due slider:

- a variabile fra 0 e 3 con passo 0.3
- b variabile fra -3 e 0 con lo stesso passo.

Inseriamo le equazioni di due parabole digitando

```
y = a * x ^ 2
y = b * x ^ 2
```

Facendo variare i parametri a e b, otteniamo i grafici delle corrispondenti parabole; nel menu contestuale relativo alla parabola mettiamo il segno di spunta sulla voce **Traccia attiva**, in modo da mantenere il grafico di tutte le parabole.



Da quanto ottenuto possiamo dedurre che:

- Quando $k > 0$ la parabola è rivolta verso l'alto e la sua ampiezza diminuisce al crescere di k
- Quando $k < 0$ la parabola è rivolta verso il basso e il suo comportamento è simmetrico rispetto all'asse x della precedente parabola.

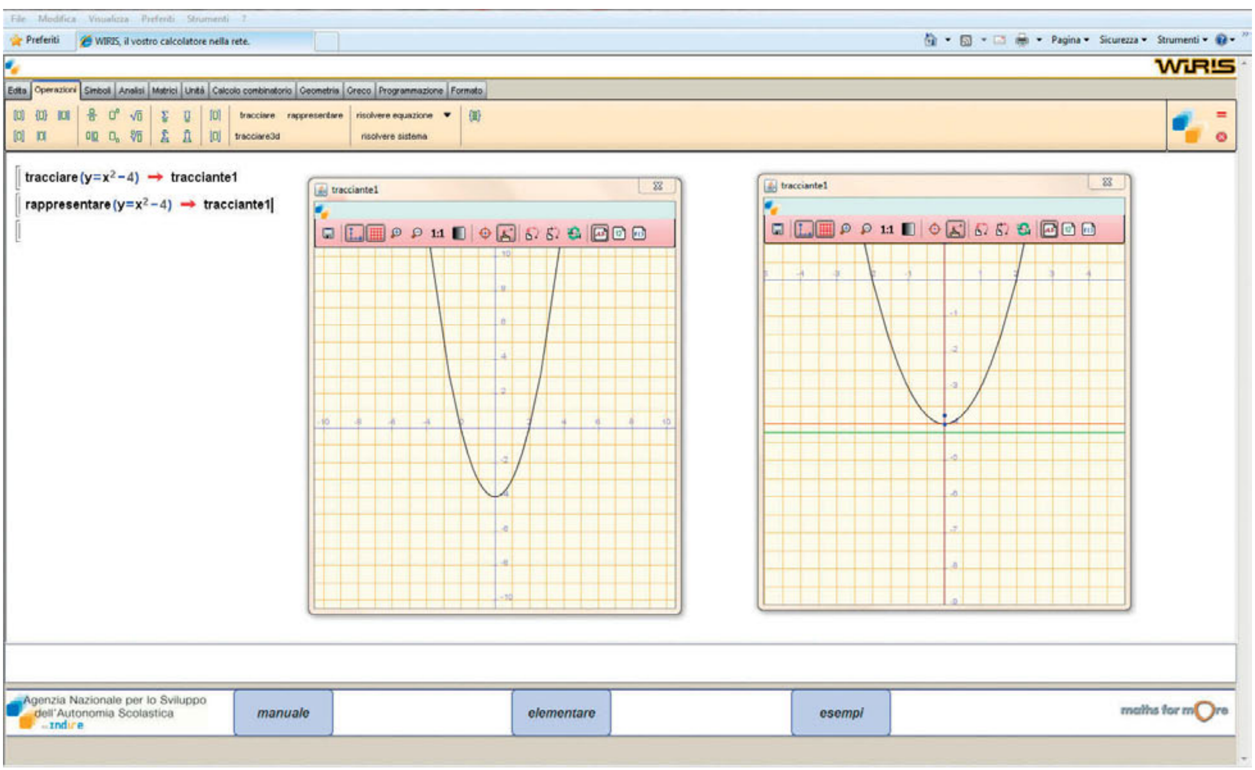
3. La parabola con WIRIS

Costruire il grafico di una parabola e individuarne le caratteristiche

Il grafico di una qualsiasi curva si può costruire con due comandi del menu **Operazioni**:

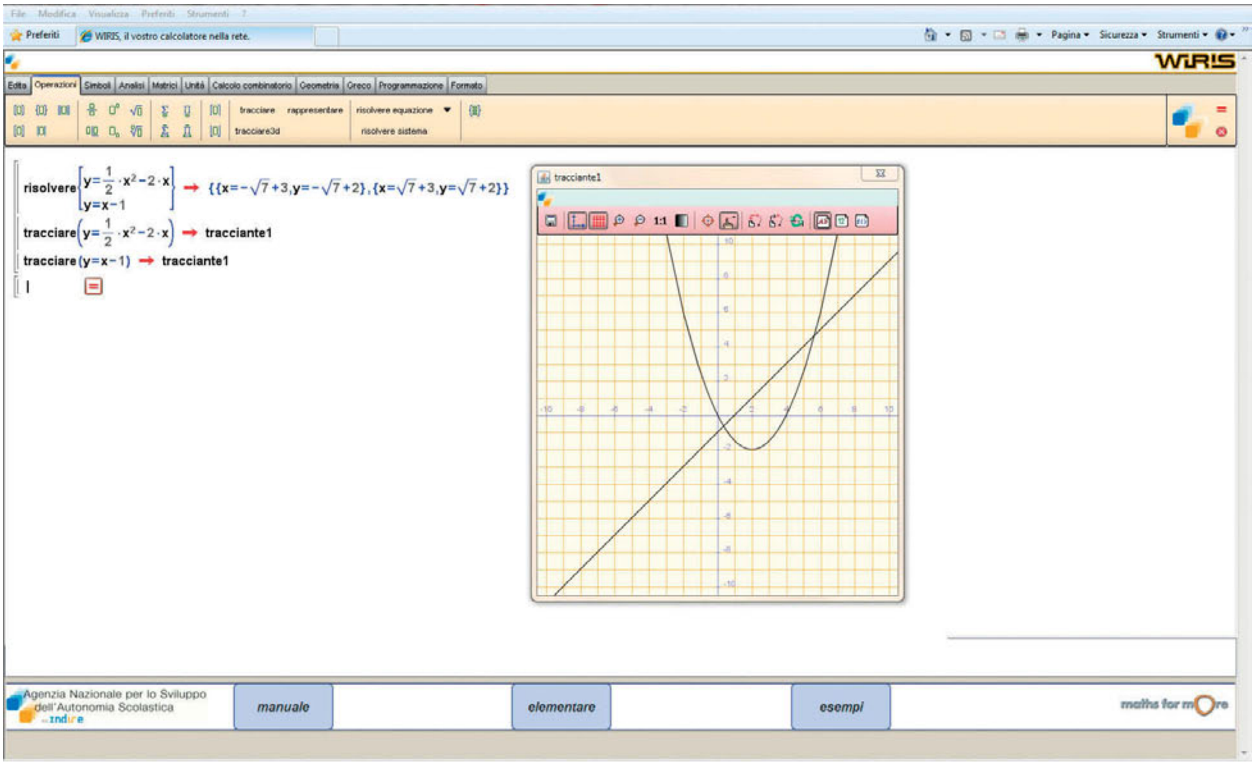
- **tracciare**
  viene aperta una parentesi nella quale scrivere l'equazione della curva; cliccando sul pulsante uguale si apre una finestra dove viene disegnata la curva
- **rappresentare**
  viene aperta una parentesi nella quale scrivere l'equazione della curva; cliccando sul pulsante uguale si apre una finestra dove viene disegnata la curva con le sue caratteristiche evidenziate

Se, per esempio, si inserisce l'equazione $y = x^2 - 4$, il comando *tracciare* disegna la parabola, il comando *rappresentare* disegna la parabola ma ne evidenzia anche il fuoco, la direttrice e la retta tangente nel vertice.



Se si vuole che i diagrammi di due o più curve vengano tracciati in un solo grafico, i comandi di tracciamento o rappresentazione devono essere inseriti in un solo blocco. Per esempio, per evidenziare i punti di intersezione della parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ con la retta $y = x - 1$ si deve, in un solo blocco:

- scrivere il sistema delle equazioni delle due curve per trovarne le coordinate
- scrivere i comandi di tracciamento dei due grafici per vedere le intersezioni



Wiris possiede dei comandi specifici per determinare le caratteristiche fondamentali della parabola attraverso i comandi:

fuochi (parabola) ***vertice (parabola)*** ***direttrice (parabola)***

Di seguito puoi vedere una porzione del foglio di lavoro con un esempio.

$$\mathbf{p=parabola(y=x^2-3x+1)} \rightarrow -x^2+3\cdot x+y-1=0$$

$$\mathbf{fuochi(p)} \rightarrow \left(\frac{3}{2},-1\right)$$

$$\mathbf{vertice(p)} \rightarrow \left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$$

$$\mathbf{direttrice(p)} \rightarrow y=-\frac{3}{2}$$

Determinare l'equazione di una parabola

Wiris scrive direttamente l'equazione di una parabola (in forma implicita) se sono note l'equazione della direttrice e le coordinate del fuoco.

La sintassi di questo comando è: ***parabola (direttrice, punto***(x_F, y_F)**)**

Per esempio:

parabola $(y = \frac{1}{2}$, *punto*$(1, 1))$	restituisce l'equazione	$-x^2 + 2x + y - \frac{7}{4} = 0$
parabola $(x = -1$, *punto*$(0, -2))$	restituisce l'equazione	$2x - y^2 - 4y - 3 = 0$

Vogliamo adesso trovare una procedura che permetta di scrivere l'equazione di una parabola conoscendo le coordinate di tre suoi punti, per esempio $(1, 2)$, $(2, 7)$ e $(-1, 4)$.
Per sostituire le coordinate di tali punti nell'equazione della generica parabola conviene costruire una funzione, che chiamiamo *EQ* e che dipende dalle coordinate (x, y) del punto che rappresenta l'equazione della parabola in forma implicita: $ax^2 + bx + c - y = 0$:

$$EQ(x, y) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c - y$$

Risolviamo poi il sistema delle equazioni che si ottengono sostituendo a x e y le coordinate dei tre punti; al fine di scrivere in modo automatico l'equazione della parabola, memorizziamo in una lista S le soluzioni:

$$S = \text{risolvere}\left(\left\{\begin{array}{l} EQ(1, 2) = 0 \\ EQ(2, 7) = 0 \\ EQ(-1,4) = 0 \end{array}\right\}\right)$$

Trattandosi di un sistema di primo grado, la lista S restituisce una sola riga i cui elementi sono i valori dei coefficienti a, b, c della parabola; essi si identificano con le scritture $S_1(a)$, $S_1(b)$, $S_1(c)$ nelle quali l'indice 1 indica la prima (ed unica) soluzione del sistema.
Per scrivere l'equazione della parabola usiamo quindi questi simboli:

$$y = S_1(a) \cdot x^2 + S_1(b) \cdot x + S_1(c)$$

Non rimane adesso che tracciare il grafico della parabola trovata:

$$\text{tracciare } (y)$$

Nella figura che segue puoi vedere l'intera procedura (i comandi fanno parte di un unico blocco).