Consigli per risolvere in modo rapido le disequazioni

Spesso si può rendere più veloce la risoluzione di una disequazione tenendo presenti alcune considerazioni.

- Qualunque fattore di cui è noto il segno può essere trascurato nella risoluzione di una disequazione; in particolare:
  - se il fattore è positivo lo si può semplificare mantenendo il verso della disequazione;
  - se il fattore è negativo lo si può semplificare cambiando il verso della disequazione.

  Per esempio:
  - $\dfrac{(x^2+1)(x+3)}{x^2} > 0$ posto che sia $x \neq 0$, è equivalente alla disequazione $x+3>0$

    Infatti sia il binomio x^2+1 che il denominatore x^2 sono sempre positivi e quindi il loro segno non influisce su quello della frazione.
  - $(4x^2-1)(-x^2-7) > 0$ è equivalente alla disequazione $4x^2-1<0$

    Infatti il binomio $-x^2-7$ è sempre negativo e può essere trascurato se si cambia il verso della disequazione.

- Una potenza di esponente pari, qualunque sia il segno della base, è sempre positiva o nulla e non è mai negativa, quindi una disequazione del tipo

  $[f(x)]^4 > 0$ **non è mai equivalente** a $f(x) > 0$.

  Una potenza di esponente dispari assume sempre il segno della base, quindi una disequazione del tipo

  $[f(x)]^5 > 0$ **è sempre equivalente** a $f(x) > 0$.

  Per esempio:
  - $(2x^2-3)^4 \geq 0$ **non è equivalente** a $2x^2-3 \geq 0$
  - $(3x^2-1)^3 < 0$ **è equivalente** a $3x^2-1<0$

Vediamo qualche esempio di risoluzione di disequazione che tiene conto di queste osservazioni.

I esempio

$\dfrac{x(2x-1)^2}{(x-2)^3} > 0$ di dominio $R - \{2\}$.

Tenendo presente che:

- $(2x-1)^2$ è sempre positivo se $x \neq \dfrac{1}{2}$ e si annulla per tale valore
- $(x-2)^3$ ha lo stesso segno di $x-2$

possiamo risolvere la disequazione $\dfrac{x}{x-2} > 0$

con la condizione che sia $x \neq \dfrac{1}{2}$ perché non vogliamo che il numeratore si annulli.

Tabella dei segni

	$-\infty$ … 0	0 … 2	2 … R
segno di x	−	+	+
segno di $x-2$	−	−	+
frazione	+	−	+

Possiamo quindi concludere che la disequazione è verificata se $x < 0 \ \vee \ x > 2$, insieme dal quale il valore $\dfrac{1}{2}$ è già escluso.

II esempio

$$\frac{(x^2+x)^4(4x^2+9)}{x^2-9} < 0$$

Dei polinomi al numeratore possiamo dire che:

- $(x^2+x)^4$ è sempre positivo per $x \neq 0 \ \wedge \ x \neq -1$ e si annulla per tali valori
- $4x^2+9$ è sempre positivo

La disequazione è quindi equivalente a $\dfrac{1}{x^2-9} < 0$

cioè, tenendo presente che il numeratore è positivo, a $x^2-9<0$

con la condizione che sia $x \neq 0 \ \wedge \ x \neq -1$ perché non vogliamo che la frazione sia nulla.

La disequazione è quindi verificata se $-3 < x < 3 \ \wedge \ x \neq 0 \ \wedge \ x \neq -1$

ESERCIZI

1 **ESERCIZIO GUIDATO**

$(x^2+5)(x^2-9) \geq 0$

L'espressione al primo membro è già fattorizzata.
Del primo fattore possiamo dire che, essendo la somma di termini positivi, è sempre positivo; esso può quindi essere trascurato e la disequazione è equivalente a

$x^2-9 \geq 0$ che ha soluzione $x \leq -3 \ \vee \ x \geq 3$

2 **ESERCIZIO GUIDATO**

$$\frac{(3x^2-4)^2(x^2+x)^3}{x} < 0$$

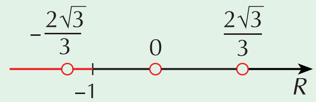
Il primo fattore al numeratore, essendo un quadrato, è sempre positivo se $x \neq \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Il segno del secondo fattore, che è elevato a potenza dispari, è quello della sua base.

La disequazione è quindi equivalente a $\dfrac{x^2+x}{x} < 0$ con $x \neq \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Raccogliendo x al numeratore e posto $x \neq 0$ si può poi semplificare ottenendo la disequazione equivalente

$x + 1 < 0 \qquad$ con $\qquad x \neq \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \wedge x \neq 0$



L'insieme delle soluzioni è quindi: $\quad x < -1$ con $x \neq -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

3 $(x^2+5x+6)(x^2+3) < 0$ $\qquad [-3 < x < -2]$

4 $-4x^2(x+1)^2(x-1) \geq 0$ $\qquad [x \leq 1]$

5 $(x^4-16)(x-2)^3 < 0$ $\qquad [x < -2]$

6 $(x^4-4x^3)(x^2+3x)^3 > 0$ $\qquad [x < -3 \vee x > 4]$

7 $\left(\dfrac{x^2-x}{x+2}\right)^2 > 0$ $\qquad [R - \{-2, 0, 1\}]$

8 $\dfrac{(x^2-4)^3(x+1)^2}{x^2-x-2} \geq 0$ $\qquad [x \leq -2 \vee x > -1 \wedge x \neq 2]$

9 $\dfrac{(x^2+7)(x^3+8)}{x^4-x^2} > 0$ $\qquad [-2 < x < -1 \vee x > 1]$

10 $\dfrac{(1-4x^2)^3(1+4x^2)}{2x^3-x^2+2x-1} \geq 0$ $\qquad \left[x < -\dfrac{1}{2}\right]$

11 $\dfrac{4x^2-1}{(2x-1)^2(x+1)} \leq 0$ $\qquad \left[x < -1 \vee -\dfrac{1}{2} \leq x < \dfrac{1}{2}\right]$

12 $\dfrac{5x(x+2)^4}{(x+3)^2} \geq 0$ $\qquad [x \geq 0 \vee x = -2]$

13 $\left(\dfrac{3x^2+3+6x}{x^2-5x+6}\right)^4 > 0$ $\qquad [S = R - \{-1, 2, 3\}]$

14 $\dfrac{(2x-1)^2(x+2)^3}{x} \geq 0$ $\qquad \left[x \leq -2 \vee x > 0 \vee x = \dfrac{1}{2}\right]$

15 $\dfrac{x^2(1-5x)^3}{(x^2+1)(x+1)} > 0$ $\qquad \left[-1 < x < \dfrac{1}{5} \wedge x \neq 0\right]$