Attività di recupero

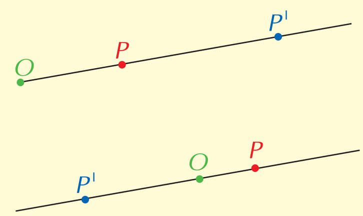
Cap 1. UNA NUOVA TRASFORMAZIONE: L'OMOTETIA

Rivedi la teoria

L'omotetia e le sue proprietà

Dati un punto O ed un numero reale k, si dice **omotetia** la trasformazione che ad ogni punto P del piano associa il punto P' appartenente alla retta PO di origine O tale che $\dfrac{OP'}{OP} = |k|$.

Se k è un numero positivo i punti P e P' si trovano dalla stessa parte rispetto ad O (figura in alto), se k è negativo P' si trova da parte opposta di P rispetto ad O (figura in basso).



Riassumiamo le proprietà dell'omotetia:

- una retta e la sua corrispondente sono fra loro parallele
- il rapporto fra due segmenti che si corrispondono vale $|k|$
- angoli che si corrispondono sono congruenti.

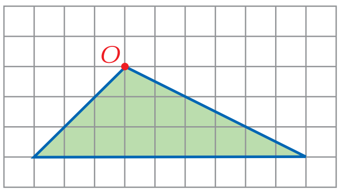
Il prodotto di omotetie

Ricordiamo che:

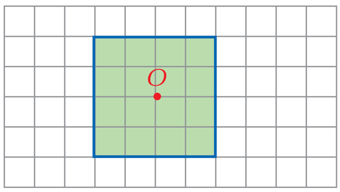
- il prodotto di due omotetie con lo stesso centro O e di rapporti h e k è un'omotetia avente ancora centro in O e rapporto hk
- il prodotto di due omotetie, la prima di centro P e rapporto k, la seconda di centro Q e rapporto h è:
  - una traslazione se $hk = 1$
  - una simmetria centrale se $hk = -1$
  - una omotetia di rapporto hk se $|hk| \neq 1$; il centro di tale omotetia è allineato con P e Q.

Fai gli esercizi

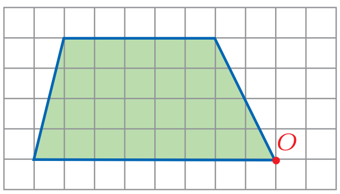
1 Applicando la definizione di omotetia, costruisci le figure corrispondenti di quelle date nelle omotetie di centri O e rapporti k indicati.



a. $k = 2$



b. $k = \dfrac{1}{3}$

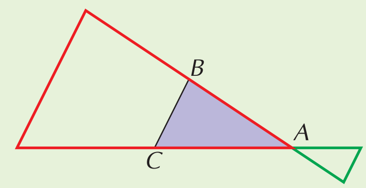


c. $k = -\dfrac{1}{2}$

2 Sia AM la mediana di un triangolo ABC. Sul prolungamento di AM, oltre M, prendi un punto P tale che $AP \cong 3AM$ e traccia da P la parallela a BC che incontra le rette dei lati AB e AC rispettivamente in Q e in R. Che relazione c'è fra QR e BC?

3 E' dato un triangolo ABC; traccia da A una qualunque semiretta che incontra il lato BC in D e prendi un punto P sul segmento AD; le parallele rispettivamente ad AB e ad AC condotte da P incontrano il lato BC in F e in E. Se $FE \cong \frac{1}{2}BC$, dove si trova il punto P?

4 **ESERCIZIO GUIDA**



Consideriamo un triangolo ABC e le due omotetie di centro A e rapporto $-\frac{1}{2}$ la prima e rapporto -4 la seconda; se eseguiamo il prodotto $\omega_{A,-4} \cdot \omega_{A,-\frac{1}{2}}$ (ricorda che le omotetie vengono eseguite in ordine inverso rispetto a come sono scritte), otteniamo l'omotetia che ha centro ancora in A e rapporto $k = -\frac{1}{2} \cdot (-4) = 2$.

Dunque trovare il trasformato di ABC in $\omega_{A,-\frac{1}{2}}$ (in verde nella figura) e poi il trasformato di quest'ultimo in $\omega_{A,-4}$ (in rosso nella figura) equivale a trovare il trasformato di ABC in $\omega_{A,2}$.

5 Dato un punto O, l'omotetia $\omega_{O,3} \cdot \omega_{O,k}$ equivale all'omotetia $\omega_{O,-2}$. Quanto vale il rapporto k della seconda omotetia?

6 Il prodotto $\omega_{P,2} \cdot \omega_{Q,k}$ è un'omotetia di rapporto 1. Che cosa puoi dire di k? A che cosa equivale il prodotto delle due omotetie?

7 Considera un quadrato $ABCD$ e trova il suo corrispondente nell'omotetia avente centro nel suo vertice A e rapporto $\frac{1}{2}$; successivamente applica al quadrato trovato l'omotetia avente centro ancora in A e rapporto -2. Che cosa puoi dire del prodotto delle due omotetie? A che cosa equivale?

Cap 2. La similitudine

Rivedi la teoria

La definizione di similitudine

La **similitudine** è la trasformazione che si ottiene come prodotto di una omotetia con una isometria. Essa ha quindi la caratteristica che i rapporti fra i segmenti che si corrispondono si mantengono costanti (tale costante prende il nome di **rapporto di similitudine**) e che gli angoli che si corrispondono sono congruenti.

I criteri di similitudine dei triangoli

Come nel caso della congruenza, esistono dei criteri di similitudine dei triangoli:

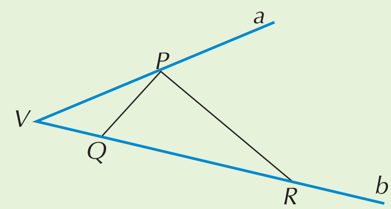
- **I criterio di similitudine dei triangoli**. Due triangoli sono simili se hanno due angoli ordinatamente congruenti.
- **II criterio di similitudine dei triangoli**. Due triangoli sono simili se hanno due coppie di lati proporzionali e gli angoli fra essi compresi congruenti.
- **III criterio di similitudine dei triangoli**. Due triangoli sono simili se hanno i tre lati ordinatamente proporzionali.

Fai gli esercizi

8 **ESERCIZIO GUIDA**

Considera un angolo $\widehat{ab}$ di vertice V e prendi un punto P sul lato a; considera poi sul lato b due punti R e Q in modo che VQ sia la metà di VP e VR sia il doppio di VP. Dimostra che i triangoli VPQ e VPR sono simili.

Scrivi innanzi tutto l'ipotesi e la tesi del teorema basandoti anche sulla figura a lato.



Hp. .... **Th.** ....

In base ai dati del problema puoi scrivere la proporzione $VP : VQ = VR : VP$.
Allora i triangoli VPQ e VPR soddisfano le condizioni del .... criterio di similitudine.

9 Il triangolo ABC è rettangolo in A; tracciata dal vertice B la bisettrice BD, conduci dal punto D la perpendicolare al segmento BD e indica con E la sua intersezione con l'ipotenusa BC. Dimostra che BD è medio proporzionale fra AB e BE.

10 Dimostra che in ogni triangolo ABC il rettangolo che ha per dimensioni un lato e la proiezione di un altro lato sulla retta del primo ha area costante.
(Suggerimento: se BE è la proiezione di AB sulla retta di BC e DB è la proiezione di BC sulla retta di AB, devi dimostrare che $r(BE, BC) \doteq r(DB, AB)$)

11 E' dato un triangolo ABC isoscele di base BC; da un punto P dell'altezza AH conduci la retta perpendicolare al lato AB che incontra AB in E e AC in D. Dimostra che $AD : PD = AH : HB$.
(Suggerimento: applica dapprima il teorema della bisettrice al triangolo AED e successivamente considera la similitudine fra i triangoli AEP e ABH)

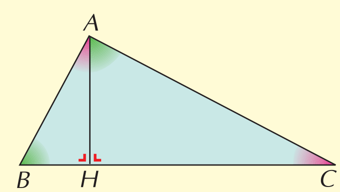
12 Data una semicirconferenza γ di centro C e diametro AB, sulla retta CB, oltre B, prendi un punto P in modo che sia $BP = 4CB$. Da P traccia la tangente a γ che interseca in Q la retta tangente in A. Dimostra che $PQ = 5AQ$.

Rivedi la teoria

I teoremi di Euclide e la similitudine

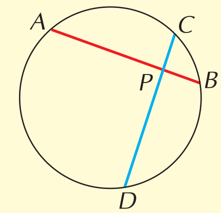
Tracciando l'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo, si vengono a determinare due triangoli rettangoli simili fra loro e simili al triangolo dato; si possono quindi scrivere le seguenti proporzioni che costituiscono un altro modo di vedere i due teoremi di Euclide:

- ciascun cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa:
  $$BC : AB = AB : BH \qquad \text{e} \qquad BC : AC = AC : CH$$
- l'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è media proporzionale fra le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa:
  $$BH : AH = AH : HC$$



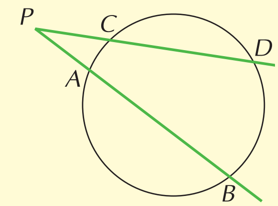
La similitudine e la circonferenza

I seguenti teoremi descrivono le proprietà delle corde e delle rette secanti e tangenti a una circonferenza.



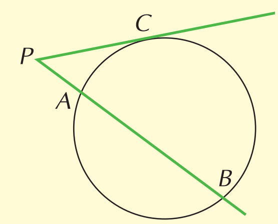
- Se due corde di una circonferenza si intersecano, i segmenti in cui rimane divisa una corda sono i medi e i segmenti in cui rimane divisa l'altra corda sono gli estremi di una proporzione:

$$PC : AP = PB : PD$$



- Se da un punto esterno a una circonferenza si tracciano due semirette secanti, una secante e la sua parte esterna sono i medi, l'altra secante e la sua parte esterna sono gli estremi di una proporzione:

$$PD : PB = PA : PC$$



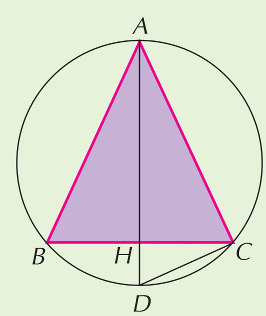
- Se da un punto esterno a una circonferenza si tracciano una semiretta secante e una tangente, il segmento di tangente è medio proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna:

$$PB : PC = PC : PA$$

Fai gli esercizi

13 **ESERCIZIO GUIDA**

Un triangolo isoscele ABC di vertice A è inscritto in una circonferenza. Dimostra che il lato del triangolo (AB oppure AC) è medio proporzionale fra l'altezza AH ed il diametro della circonferenza.



Prolungata l'altezza AH fino ad incontrare in D la circonferenza e tracciato il segmento DC, il triangolo ACD è un triangolo rettangolo perché ....

Il cateto AC di questo triangolo è medio proporzionale tra ....

14 Da un punto P esterno ad una circonferenza manda due secanti che incontrano la circonferenza in A e D la prima ($PA < PD$) e in B e C la seconda ($PB < PC$). Dimostra che se il rapporto $\frac{PD}{PC} = 1$, il quadrilatero $ABCD$ è un trapezio isoscele.

15 E' dato un angolo $\widehat{ab}$ di vertice V; sul lato a prendi due punti A e B in modo che sia $\overline{VA} = 6$ e $\overline{AB} = 18$; sul lato b prendi due punti C e D in modo che sia $\overline{VC} = 8$ e $\overline{CD} = 10$. Dimostra che i punti A, B, C, D appartengono ad una stessa circonferenza e che, indicato con M il punto di intersezione dei segmenti AD e BC, si ha che $AM : CM = MB : MD$.

16 Traccia le altezze AH, BK e CR di un triangolo ABC e indica con O il loro punto di intersezione; individua quali fra i triangoli rettangoli che si vengono a formare sono simili fra loro.

Verifica del recupero

1 Barra vero o falso.

Un segmento AB è perpendicolare a un segmento CD ed è $AB \cong \frac{5}{2}CD$; $A'B'$ e $C'D'$ sono i corrispondenti di AB e CD nell'omotetia avente centro in un punto O e rapporto $k = \frac{3}{4}$. Si può dire che:

a. $A'B'$ è perpendicolare a $C'D'$ V F

b. $A'B' \cong \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} CD$. V F

c. $AB = \frac{4}{3} A'B'$. V F

d. $A'B' \cong \frac{5}{2} C'D'$. V F

1 punto

2 Barra vero o falso.

a. Il prodotto di due omotetie in cui il rapporto vale 1 oppure -1 è una isometria. V F

b. Il prodotto di due omotetie con lo stesso centro e di rapporti h e k è una omotetia di rapporto $\frac{h}{k}$. V F

c. Il prodotto di due omotetie di centri A e B è un'omotetia il cui centro è allineato con A e B. V F

d. Se il prodotto di due omotetie è una traslazione, le due omotetie hanno centri diversi. V F

1 punto

3 Nel prodotto di un'omotetia di rapporto -1 con una traslazione di un vettore $\vec{v}$ assegnato:

a. due segmenti che si corrispondono sono congruenti V F

b. due rette che si corrispondono sono sempre parallele V F

c. se due angoli sono supplementari, anche i loro corrispondenti sono supplementari. V F

Considera adesso il prodotto di un'omotetia di rapporto -2 con una traslazione dello stesso vettore $\vec{v}$; quali sono i valori di verità delle precedenti proposizioni?

1 punto

4 Da un punto P esterno ad una circonferenza γ di centro O e raggio $r = 15a$ conduci una retta secante che incontra γ in A e in B (con $PA < PB$); una ulteriore secante uscente da P passa anche per il centro O e incontra γ in C e in D. Sapendo che $\overline{PB} = 30a$, $\overline{PC} = 12a$, si può dire che:

a. $\overline{AP}$ è uguale a:

① $16{,}8a$ ② $8{,}6a$ ③ $12a$ ④ $7a$

b. qualunque segmento di tangente condotto da P misura:

① $62a$ ② $504a$ ③ $6a\sqrt{14}$ ④ non si può calcolare

2 punti

5 Un trapezio rettangolo ha la diagonale perpendicolare al lato obliquo. Dimostra che:

a. la diagonale è media proporzionale fra le basi

b. il lato perpendicolare alle basi è medio proporzionale tra la base minore e la proiezione del lato obliquo sulla base maggiore.

3 punti

6 Nel trapezio $ABCD$, rettangolo in A e in D, le diagonali sono perpendicolari e si incontrano in H; dimostra che $r(DB, DH) \doteq r(AH, AC)$.

2 punti

Soluzioni

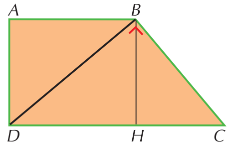
1 **a.** V, **b.** F, **c.** V, **d.** V

2 **a.** V, **b.** F, **c.** V, **d.** V

3 **a.** V, **b.** V, **c.** V; **a.** F, **b.** V, **c.** V

4 **a.** ① **b.** ③

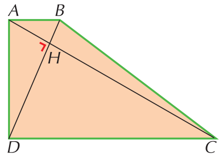
5



a. Basta applicare il primo teorema di Euclide al triangolo DBC: $DC : DB = DB : DH$, ma $DH \cong AB$ quindi $DC : DB = DB : AB$

b. BH è medio proporzionale tra DH e HC (II teorema di Euclide) e poiché $DH \cong AB$, $BH \cong AD$, segue la tesi.

6



Basta applicare il primo teorema di Euclide ai triangoli ABD e ADC:
$DH : AD = AD : DB$ $\qquad AH : AD = AD : AC$.
Confrontando le due proporzioni segue la tesi.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	
Punteggio							

Valutazione in decimi

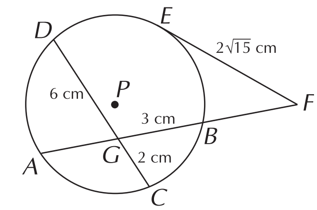
Math in English

Glossary

altitude altezza
cyclic quadrilateral quadrilatero inscritto in una circonferenza
diagonal diagonale

1 In circle γ on the right hand, chords AB and CD intersect at point G. Secant AF and tangent EF are also shown. Find the lenght of BF.
(In the diagram, $GD = 6$, $GC = 2$, $BG = 3$, and $EF = 2\sqrt{15}$, and all units are in centimeters)

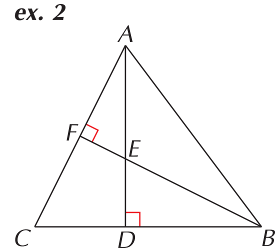
ex. 1



2 In the triangle shown, altitude AD meets altitude BF at E. Suppose $AD = 8$, $BD = 6$, and $CD = 4$. What is the lenght of ED?

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **c.** 2 **d.** $\frac{5}{2}$ **e.** 3

ex. 2

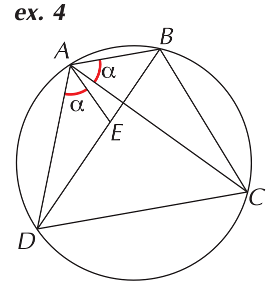


3 Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral (all vertices lie on a circle) with diagonals AC and BD as shown in the sketch. Pick point E on the diagonal BD so that angle $\widehat{DAE}$ equals angle $\widehat{BAC}$. Which of the following statements are true?

① triangle ADE is similar to triangle ACB.
② $AE = AB$.
③ $AE \cdot AC = AB \cdot AD$
④ $AB^2 + DC^2 = AD^2 + BC^2$

a. ① and ② **b.** ① and ③ **c.** ② and ④
d. ③ and ④ **e.** ①, ③ and ④

ex. 4



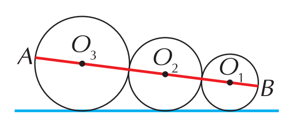
4 Two circles of radii 14 and 22 units are 45 units apart at the centres. What is the lenght of their common internal tangent?

a. 3 **b.** 14 **c.** 22 **d.** 27 **e.** 36

5 Three circles are arranged in a row so that each is tangent to the circles next to it. The radii of the two circles at the two ends are 5 and 3. What is the lenght of the line segment AB that passes through the center of each circle?

a. 24 **b.** $16 + 4\sqrt{3}$ **c.** 20
d. $16 + 2\sqrt{15}$ **e.** $16 + 3\sqrt{15}$

ex. 5



1 5cm **2** e. **3** b. **4** d. **5** d.