

Operazioni in binario

Vediamo come eseguire le principali operazioni utilizzando numeri binari.

Addizione

Nel sistema decimale per eseguire un'addizione, per esempio $39+145$ occorre:

- mettere in numeri in colonna allineando la virgola (o la cifra delle unità)

$$\begin{array}{r} 39 + \\ 145 = \\ \hline \end{array}$$

- Sommare le cifre partendo da destra, se c'è una somma maggiore di 9, occorre tenere conto del riporto. Nell'esempio $9+5=14$ col riporto di 1.
- e così via:

$$\begin{array}{r} 39 + \\ 145 = \\ \hline 1 \\ \hline 184 \end{array}$$

Nel sistema binario si procede esattamente nello stesso modo, tenuto conto che:

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 10$, cioè 0 col riporto di 1

Quindi, se dovessimo sommare $10101+1011$

- allineiamo a destra
- iniziamo a sommare da destra
- $1+1$: scriviamo 0 con il riporto di 1
- e così via ...

$$\begin{array}{r} 10001 + \\ 1011 = \\ \hline 11 \\ \hline 11100 \end{array}$$

Sottrazione

Per eseguire la sottrazione si può, procedendo come in precedenza, utilizzare una procedura analoga a quella utilizzata nel sistema decimale. In questo caso è molto più comodo però utilizzare i **complementi**.

Ragioniamo in decimale. Per calcolare $1342-228$ posso calcolare il complemento di 228 (che è quello che manca per arrivare a 10000):

$$10000 - 228 = 9772 \text{ (è il complemento di 228)}$$

e sommarlo a 1342, non considerando l'ultimo riporto

$$1342 + 9772 = 11114 \text{ quindi } 1114$$

infatti

$$1342 - 228 = 1114$$

Nel sistema decimale, sommare il complemento al posto di sottrarre, può sembrare assurdo. Nel sistema binario risulta invece molto comodo poichè il complemento si calcola facilmente: basta cambiare tutte le cifre e aggiungere 1.

Quindi per eseguire $10001 - 1011$:

- calcolo il complemento di 1011
 - cambio tutte le cifre 0100
 - aggiungo 1: $0100 + 1 = 0101$
- sommo, come visto sopra, il complemento:
 - $10001 + 0101 = 10110$
 - ignoro la prima cifra, quindi 0110 che è 110.

Proviamo con un secondo esempio: $101010 - 11000$

- calcolo il complemento di 11000
 - cambio tutte le cifre 00111
 - aggiungo 1: $00111 + 1 = 01000$
- sommo il complemento
 - $101010 + 01000 = 110010$
 - ignoro la prima cifra, quindi il risultato è 10010.

Moltiplicazione

Come nei casi precedenti vediamo come si esegue la moltiplicazione nel sistema decimale, per esempio 134×51 .

- Si scrivono i numeri in colonna

$$\begin{array}{r} 134 \times \\ 51 = \\ \hline \end{array}$$

- si moltiplica il primo numero per la cifra più a destra del secondo numero

$$\begin{array}{r} \mathbf{134} \times \\ \mathbf{51} = \\ \hline \mathbf{134} \end{array}$$

- si passa alle altre cifre del secondo numero, spostando sempre a sinistra il numero di un posto

$$\begin{array}{r} \mathbf{134} \times \\ \mathbf{51} = \\ \hline 134 \\ \mathbf{670} - \end{array}$$

- si esegue la somma

$$\begin{array}{r}
 1\ 3\ 4\ x \\
 5\ 1\ = \\
 \hline
 1\ 3\ 4 \\
 6\ 7\ 0\ - \\
 \hline
 6\ 8\ 3\ 4
 \end{array}$$

Nel sistema binario si esegue lo stesso procedimento che però risulta molto più semplice in quanto i prodotti possono essere solo per la cifra 0 (e quindi il risultato è 0) o per la cifra 1 (e quindi si copia il numero come è).

Per esempio calcoliamo 10001×1011

- Si scrive in colonna

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ x \\
 1\ 0\ 1\ 1\ = \\
 \hline
 \end{array}$$

- moltiplica per 1 (quindi si copia il primo numero)

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ x \\
 1\ 0\ 1\ 1\ = \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 0\ 1
 \end{array}$$

- poi per le altre cifre (spostandosi sempre di una cifra a sinistra)

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ x \\
 1\ 0\ 1\ 1\ = \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\
 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ - \\
 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -\ - \\
 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ -\ -\ -
 \end{array}$$

- si somma

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ x \\
 1\ 0\ 1\ 1\ = \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\
 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ - \\
 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -\ - \\
 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ -\ -\ - \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1
 \end{array}$$

In generale si evita di scrivere la riga con tutti gli zeri: per ogni zero del secondo numero si sposta una volta di più il numero successivo verso sinistra. Per esempio:

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ x \\
 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ = \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ -\ -\ -\ - \\
 \hline
 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1
 \end{array}$$

Divisione

Per comprendere più facilmente la divisione di due numeri binari, facciamo riferimento a un esempio.

$$1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 \quad \text{diviso} \quad 1\ 0\ 1$$

- dapprima si separano le prime tre cifre del dividendo e si dividono per il divisore ottenendo come quoziente 1

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 : 1\ 0\ 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

- si moltiplica il quoziente e il divisore scrivendo il risultato incolonnato sotto il dividendo e si effettua la sottrazione (ricordare le regole della sottrazione binaria)

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 : 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0 \end{array}$$

- si abbassa la cifra a destra e si ripete la divisione, come prima

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 : 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

- si abbassa un'altra cifra a destra, e così via fino a quando tutte le cifre sono state abbassate, ottenendo alla fine il quoziente e il resto della divisione

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1 : 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 0 \\ 0 \\ \hline 0\ 1 \\ 0 \\ \hline 1\ 1 \\ 0 \\ \hline 1\ 1 \end{array}$$

Per esercizio, si effettui la divisione di due numeri binari e poi si controlli la correttezza del risultato trasformando dividendo, divisore, quoziente e resto in numeri decimali e confrontando il quoziente e resto, ottenuti con la divisione binaria, con il quoziente e resto ottenuti con la divisione decimale.