Problemi di massimo e minimo in casi particolari

Per risolvere alcuni problemi di massimo e minimo si può ricorrere a due proprietà che consentono spesso di evitare calcoli lunghi e laboriosi.

Prima proprietà.

Se $x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n$ sono numeri reali positivi tali che la loro somma sia costante e $r_1, r_2, \dots\dots\dots, r_n$ sono numeri razionali positivi, allora la quantità

$$x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot \dots\dots\dots \cdot x_n^{r_n} \qquad (\mathbf{A})$$

è massima quando il rapporto $\dfrac{x_i}{r_i}$ è costante, cioè quando $\dfrac{x_1}{r_1} = \dfrac{x_2}{r_2} = \dots\dots\dots = \dfrac{x_n}{r_n}$.

In particolare la proprietà diventa di semplice intepretazione quando i termini x_i hanno esponente uguale a 1:

- se due o più numeri reali hanno somma costante, il loro prodotto è massimo quando i numeri sono uguali.

Per esempio:

- il rettangolo di assegnato perimetro con area massima è il quadrato.

Seconda proprietà.

Se $r_1, r_2, \dots\dots\dots, r_n$ sono numeri razionali positivi e $x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n$ sono numeri reali positivi tali che il prodotto $x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot \dots\dots\dots \cdot x_n^{r_n}$ sia costante, allora la quantità

$$x_1 + x_2 + \dots\dots\dots + x_n \qquad (\mathbf{B})$$

è minima quando il rapporto $\dfrac{x_i}{r_i}$ è costante.

Anche questa proprietà diventa di semplice intepretazione quando i termini x_i hanno esponente uguale a 1:

- se due o più numeri reali positivi hanno prodotto costante, la loro somma è minima quando i numeri sono uguali.

Per esempio:

- il rettangolo di area assegnata con perimetro minimo è il quadrato;
- il parallelepipedo rettangolo di volume assegnato con superficie minima è il cubo.