Le equazioni di terzo grado

Bisogna arrivare ai primi del Cinquecento, epoca del Rinascimento e del rifiorire dell'interesse per le scienze, perché si giunga a sviluppare un metodo per risolvere le equazioni di terzo grado. La scoperta si deve al matematico italiano **Scipio Dal Ferro**, il quale però, come era in uso all'epoca, non la pubblicò, bensì la comunicò ad uno dei suoi allievi. Era costume di quei tempi istituire delle gare in cui si sfidavano i matematici a trovare dei metodi per risolvere problemi. Fu appunto così che l'allievo di Dal Ferro sfidò in una gara uno dei più prestigiosi matematici del tempo: **Niccolò Tartaglia** (di cui abbiamo già sentito parlare a proposito del famoso triangolo che consente di determinare i coefficienti dello sviluppo della potenza di un binomio). Egli accettò la sfida e già otto giorni prima della fine della gara trovò a sua volta un metodo per risolvere una qualsiasi equazione di terzo grado che si presentasse nella forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

Tartaglia risolse in breve tempo tutti i problemi posti dall'avversario e vinse la gara. **Girolamo Cardano**, che era professore di matematica e fisica a Milano, venuto a conoscenza del fatto, pregò allora Tartaglia di comunicargli la sua scoperta. Quest'ultimo, dapprima riluttante, cedette alla fine con la promessa che Cardano avrebbe tenuto per sé quel metodo. Cardano invece, dopo aver approfondito gli studi sull'argomento con la collaborazione di **Ludovico Ferrari** (al quale sarà poi dovuta la scoperta di una formula per la risoluzione delle equazioni di quarto grado), pubblicò i risultati di queste ricerche nel 1545, nella sua opera *Ars Magna*, guadagnandosi così ufficialmente la fama di inventore della formula per risolvere le equazioni di terzo grado. La formula di Cardano, che sarebbe più corretto chiamare di Tartaglia, parte dal presupposto che una qualsiasi equazione di terzo grado nella forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

(si può sempre supporre che il coefficiente di x^3 sia uguale ad 1 eventualmente operando le opportune divisioni) si possa ricondurre ad un'altra equazione, nella quale non compaia il termine di secondo grado, operando un cambiamento di variabile e ponendo in questo caso

$$x = y - \frac{1}{3}a.$$

Vediamo con un esempio come si dovrebbe operare.

Data l'equazione $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ in cui $a = -6$, poniamo $x = y + 2$. Operando tale sostituzione otteniamo

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 5(y+2) - 1 = 0$$

e, sviluppando i calcoli, $y^3 - 7y - 7 = 0$

Partendo dunque dal presupposto che un'equazione di terzo grado si può sempre scrivere, con la sostituzione anzidetta, nella forma

$$x^3 + px + q = 0$$

la formula di Cardano che determina le sue soluzioni è:

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$$

Tale formula comportava però qualche difficoltà di utilizzo sia perché è la somma di due radicali doppi, non agevole da calcolare a quei tempi, sia perché spesso porta alla determinazione della radice quadrata di un numero negativo, che per i matematici del tempo non aveva significato e che soltanto più tardi, con l'introduzione dei numeri complessi, ne acquistò uno.

Applicandola all'equazione dell'esempio precedente, $y^3 - 7y - 7 = 0$, la formula, tenendo presente che $p = -7$ e $q = -7$, dà

$$x = \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{343}{27}}}$$

cioè $\quad x = \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{7}{6}\sqrt{-\frac{1}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \frac{7}{6}\sqrt{-\frac{1}{3}}}$

Subito dopo la pubblicazione della formula di Cardano, Ferrari trovò un metodo per risolvere anche l'equazione di quarto grado.

Queste scoperte produssero enorme impressione nel mondo scientifico dell'epoca. Fino a quel tempo gli studi matematici, come del resto ogni altro genere di studi, erano stati indirizzati all'approfondimento e all'interpretazione delle grandi opere antiche (in particolare quelle greche), nella convinzione che esse rappresentassero il vertice delle possibili conoscenze. Ora invece erano state risolte questioni che gli antichi non erano stati capaci di spiegare. Questo segnò il superamento di una "soglia" psicologica decisiva, che aprì la via a ricerche sempre più ardite e innovative.