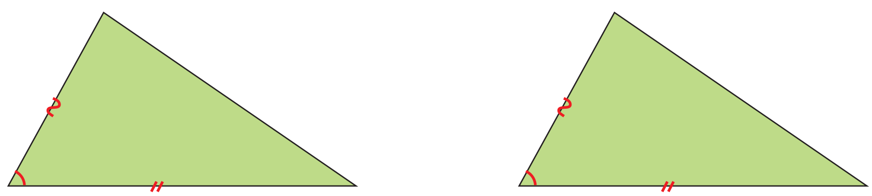
I primi elementi e i triangoli

I triangoli

1 **ESERCIZIO SVOLTO**

Il primo criterio di congruenza. Il confronto fra figure geometriche è un'operazione che ricorre spesso in geometria, specialmente il confronto fra triangoli. Per stabilire se due triangoli sono congruenti si possono usare dei criteri di congruenza, il primo dei quali dice che:

- se due triangoli hanno due lati e l'angolo fra essi compreso ordinatamente congruenti, allora sono congruenti.

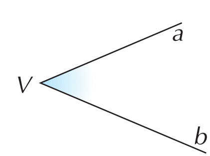


Servendoci di questo criterio dimostriamo il seguente teorema la cui dimostrazione puoi seguire nelle figure che seguono.

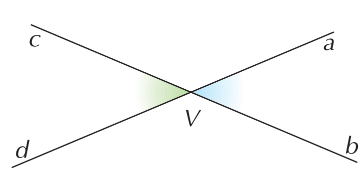
Consideriamo un angolo $\widehat{ab}$ di vertice V ed il suo opposto al vertice $\widehat{cd}$; prendiamo poi un punto P sulla semiretta a, un punto Q sulla semiretta c, un punto R su b e un punto S su d, in modo che $VP \cong VQ$ e $VR \cong VS$. Dimostriamo che $PR \cong QS$.

Per prima cosa costruiamo il disegno seguendo le indicazioni del testo. La costruzione della figura relativa ad un teorema avviene per gradi; nel nostro caso dobbiamo:

- disegnare l'angolo $\widehat{ab}$ di vertice V

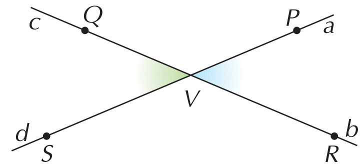


- disegnare il suo opposto al vertice $\widehat{cd}$

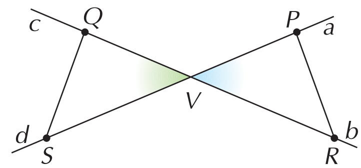


© Istituto Italiano Edizioni Atlas

- prendere i punti P, R, Q, S sulle semirette a, b, c, d in modo che $VP \cong VQ$ e $VR \cong VS$



- tracciare i segmenti PR e QS



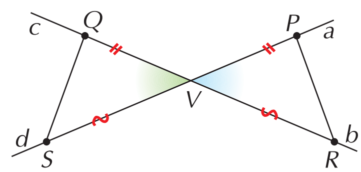
Quando la figura è completata, occorre rileggere il teorema per scrivere l'ipotesi e la tesi e contemporaneamente segnare sulla figura le congruenze rilevate:

Hp. $\widehat{cd}$ opposto al vertice $\widehat{ab}$ **Th.** $PR \cong QS$

$VP \cong VQ$

$VR \cong VS$

Al termine di questo lavoro la figura diventa la seguente:



La tesi prevede di dimostrare che i segmenti PR e QS sono congruenti, quindi dobbiamo individuare un triangolo che abbia come lato PR ed un triangolo che abbia come lato QS che possano essere congruenti. È facile intuire che i triangoli cercati sono PVR e QVS. Di essi sappiamo che:

$VP \cong VQ$ per ipotesi

$VR \cong VS$ per ipotesi

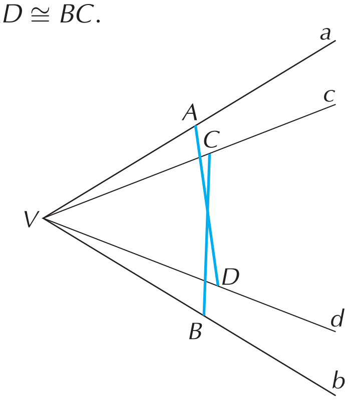
$\widehat{PVR} \cong \widehat{QVS}$ perché angoli opposti al vertice sono congruenti

Sono in questo modo verificate le ipotesi del primo criterio di congruenza e perciò i due triangoli sono congruenti; se due triangoli sono congruenti, hanno tutti gli elementi a due a due congruenti e quindi il lato PR è congruente al suo omologo che è QS. La dimostrazione del teorema è in questo modo completata.

2 ESERCIZIO GUIDATO

Disegna un angolo $\widehat{ab}$ di vertice V e traccia due semirette c e d interne all'angolo in modo che $\widehat{ac} \cong \widehat{db}$, prendi poi un punto A su a ed un punto C su c in modo che sia $VA \cong VC$, un punto D su d ed un punto B su b in modo che sia $VD \cong VB$. Dimostra che $AD \cong BC$.

La figura che risulta dal testo del teorema è la seguente:



Completa la scrittura dell'ipotesi e della tesi e segna in rosso sulla figura gli elementi congruenti.

Hp. $\widehat{ac} \cong$ .... **Th.** $AD \cong$ ....

$VA \cong$ ....

$VD \cong$ ....

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

Dimostrazione.

Il primo triangolo che devi considerare è quello a cui appartiene AD, cioè ....

Il secondo triangolo che devi considerare è quello a cui appartiene BC, cioè ....

Di questi triangoli sai che:

$VA \cong$ .... per ....

$VD \cong$ .... per ....

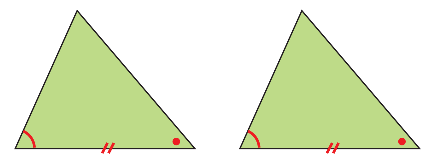
$\widehat{AVC} \cong$ .... perché ....

$\widehat{AVD} \cong$ .... perché ....

I due triangoli sono quindi congruenti per il .... ed in particolare .... $\cong$ ....

3 **ESERCIZIO GUIDATO**

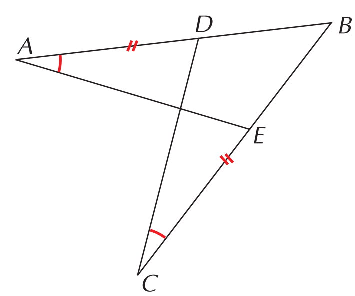
Il secondo criterio di congruenza. Se due triangoli hanno un lato e i due angoli ad esso adiacenti ordinatamente congruenti, allora sono congruenti.



Servendoci di questo criterio dimostriamo il seguente teorema (completa la dimostrazione).

Disegniamo due segmenti congruenti e consecutivi AB e BC; tracciamo dal vertice A e dal vertice C due semirette che formano angoli congruenti con AB e BC; indichiamo con D il punto che si viene a determinare su AB e con E il punto su BC. Dimostriamo che $BE \cong BD$.

Costruiamo la figura e scriviamo l'ipotesi e la tesi:



Hp. $\widehat{AB} \cong$ .... **Th.** .... $\cong$ ....

$\widehat{BAE} \cong$ ....

Dimostrazione.

Conviene considerare i triangoli ABE e CBD che hanno:

$AB \cong$ .... per ....

$\widehat{ABE} \cong$ .... per la proprietà ....

$\widehat{BAE} \cong$ .... per ....

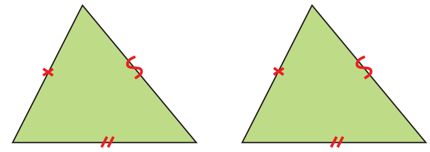
I due triangoli sono quindi congruenti per il secondo criterio ed in particolare $BE \cong BD$.

4 Dei triangoli ABC e DEF si sa che $BC \cong EF$ e che gli angoli esterni ai triangoli adiacenti a questi lati sono ordinatamente congruenti. Dimostra che $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$.

© ISTITUTO ITALIANO EDIZIONI ATLAS

5 ESERCIZIO GUIDATO

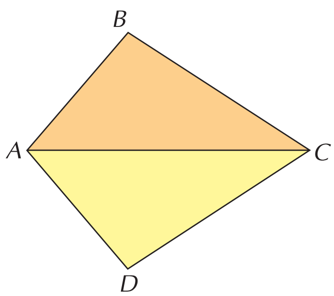
Il terzo criterio di congruenza. Se due triangoli hanno i tre lati ordinatamente congruenti, allora sono congruenti.

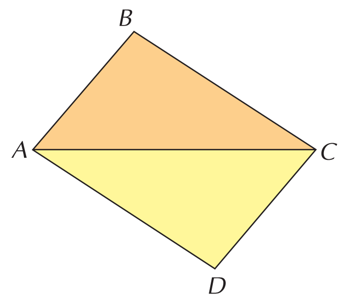


Servendoci di questo criterio dimostriamo il seguente teorema (completa la dimostrazione).

Il triangolo *ABC* ed il triangolo *ACD* sono congruenti e hanno in comune il lato *AC*; inoltre l'angolo $\widehat{ACB}$ è congruente all'angolo $\widehat{CAD}$. Dimostra che sono congruenti anche i triangoli *ABD* e *CBD*.

Due triangoli congruenti che hanno un lato in comune possono essere disegnati nei seguenti due modi:

a. 

b. 

L'informazione aggiuntiva che $\widehat{ACB} \cong \widehat{CAD}$ non è quindi superflua e serve ad indicare che la situazione del nostro teorema è quella del caso *b*. L'ipotesi e la tesi del teorema sono dunque le seguenti:

Hp. $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ADC}$ **Th.** $\overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{CBD}$

$\widehat{ACB} \cong \widehat{CAD}$

Dimostrazione.

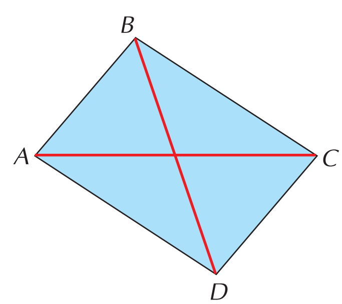
Se i triangoli *ABC* e *ADC* sono congruenti, tutti i loro elementi sono ordinatamente congruenti, quindi

$AB \cong$ ....

$BC \cong$ ....

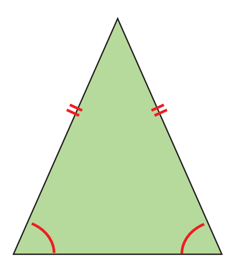
Inoltre, per la proprietà riflessiva della congruenza, $DB \cong$ ....

Allora i triangoli *ABD* e *CBD* sono congruenti per il terzo criterio.



6 ESERCIZIO GUIDATO

Le proprietà del triangolo isoscele. Un triangolo isoscele è un triangolo che ha due lati congruenti; una sua proprietà è che anche gli angoli opposti a tali lati sono congruenti.



Allora, per dimostrare che un triangolo è isoscele possiamo:

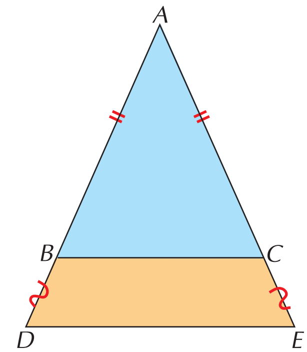
- dimostrare che ha due lati congruenti, oppure
- dimostrare che ha due angoli congruenti.

Servendoci di uno di questi criteri dimostriamo il seguente teorema (completa la dimostrazione).

© Istituto Italiano Edizioni Atlas

Disegniamo un triangolo *ABC* isoscele di base *BC* e prolunghiamo i lati congruenti, dalla parte della base, di due segmenti congruenti *CE* e *BD*. Dimostriamo che anche il triangolo *ADE* è isoscele.

La figura del teorema è a lato.



Scriviamo l'ipotesi e la tesi:

Hp. $AB \cong AC$ **Th.** $\widehat{ADE}$ è isoscele

$BD \cong CE$

Dimostrazione.

Osserviamo che:

$AB \cong$ .... per ....

$BD \cong$ .... per ....

$AD \cong AE$ perché ....

Quindi il triangolo *ADE*, avendo due lati congruenti, è anch'esso isoscele.

7 Nel triangolo *ABC*, l'angolo di vertice *A* è il doppio dell'angolo di vertice *B*; traccia la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$ che incontra il lato *BC* in *F*. Dimostra che il triangolo *ABF* è isoscele.

8 Un triangolo isoscele *ABC* di vertice *A* ha la base che è la metà del lato obliquo; traccia la mediana *BM* e dimostra che il triangolo *BMC* è anch'esso isoscele.

9 In un triangolo *ABC* il lato *BC* è il doppio del lato *AB* e la mediana *AM* è congruente ad *AB*. Individua gli angoli congruenti della figura e stabilisci se vi sono triangoli isosceli o equilateri.

© Istituto Italiano Edizioni Atlas