APPROFONDIMENTO

Equazioni che si risolvono con particolari artifici

Operare un cambio di variabile in un'equazione spesso può far risparmiare calcoli; vediamo subito alcuni esempi.

I esempio

Risolviamo l'equazione $(2x-1)^3+8=0$

Le procedure di risoluzione possono essere diverse:

- possiamo sviluppare il calcolo e poi cercare di scomporre il polinomio al primo membro
- possiamo scomporre $(2x-1)^3+8$ come somma di cubi e poi annullare ogni fattore
- possiamo operare un cambio di variabile ponendo $2x-1=t$ e risolvere l'equazione binomia $t^3+8=0$.
  E' evidente che, fra i metodi proposti, il terzo è il meno faticoso e il più immediato:

  $t^3=-8 \quad \rightarrow \quad t=-2$

  operiamo la sostituzione inversa $2x-1=-2 \quad \rightarrow \quad x=-\dfrac{1}{2}$.

II esempio

Risolviamo l'equazione $(x^2+1)^4+2(x^2+1)^2-3=0$

E' subito evidente che non conviene sviluppare il calcolo e che è più vantaggioso operare il seguente cambio di variabile:

$$(x^2+1)^2=t$$

con il quale l'equazione diventa $t^2+2t-3=0$

ed ha soluzione $t = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$

Operando la sostituzione inversa otteniamo le due equazioni:

- $(x^2+1)^2=-3$ equazione impossibile (un quadrato non può essere uguale ad un numero negativo)
- $(x^2+1)^2=1$ che è equivalente alle due equazioni

$$\begin{cases} x^2+1=-1 & \rightarrow \quad \text{impossibile in } R \\ x^2+1=1 & \rightarrow \quad x=0 \end{cases}$$

In definitiva, la sola soluzione dell'equazione è $x=0$: $S=\{0\}$.

III esempio

Consideriamo l'equazione di quarto grado reciproca completa

$$12x^4-4x^3-41x^2-4x+12=0$$

Per risolverla dobbiamo effettuare una particolare sostituzione che possiamo individuare facilmente se riscriviamo l'equazione nella forma che si ottiene con i seguenti passaggi:

- dividiamo entrambi i membri per x^2 (l'operazione è lecita perché 0 non è soluzione dell'equazione):

  $12x^2-4x-41-\dfrac{4}{x}+\dfrac{12}{x^2}=0$

- raccogliamo a fattor comune i termini che hanno lo stesso coefficiente:
$12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-41=0$

La sostituzione da operare è suggerita dalla forma stessa dell'equazione ed è: $x+\frac{1}{x}=t$

Per sapere che cosa sostituire al posto di $x^2+\frac{1}{x^2}$ osserviamo che $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

e che quindi $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, cioè $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$.

In definitiva le sostituzioni da operare sono:

- $\boldsymbol{t^2-2}$ **al posto di** $\boldsymbol{x^2+\frac{1}{x^2}}$
- $\boldsymbol{t}$ **al posto di** $\boldsymbol{x+\frac{1}{x}}$

Con ciò l'equazione diventa: $12(t^2-2)-4t-41=0 \quad\rightarrow\quad 12t^2-4t-65=0$

ed ha soluzioni: $t=\begin{cases}-\frac{13}{6}\\ \frac{5}{2}\end{cases}$

Per tornare alla variabile x operiamo la sostituzione inversa e risolviamo le due equazioni:

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{13}{6} \quad\rightarrow\quad 6x^2+13x+6=0 \quad\rightarrow\quad x=\begin{cases}-\frac{3}{2}\\ -\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \quad\rightarrow\quad 2x^2-5x+2=0 \quad\rightarrow\quad x=\begin{cases}\frac{1}{2}\\ 2\end{cases}$$

In definitiva l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è $S=\left\{-\frac{2}{3},-\frac{3}{2},\frac{1}{2},2\right\}$.

Generalizziamo la procedura.

Per risolvere l'equazione **reciproca di quarto grado completa**

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

si deve:

- dividere entrambi i membri per x^2
- raccogliere a fattor comune i termini che hanno coefficienti uguali
- operare le sostituzioni: $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ e $x+\frac{1}{x}=t$
- risolvere l'equazione di secondo grado in t ottenuta
- dette t_1 e t_2 le soluzioni, operare la sostituzione inversa $x+\frac{1}{x}=t_1$ e $x+\frac{1}{x}=t_2$ e risolvere le equazioni in x ottenute.

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$\left(\frac{3x}{x+1}\right)^4 - 13\left(\frac{3x}{x+1}\right)^2 + 36 = 0$$

Il dominio dell'equazione è $D = R - \{-1\}$.

Poniamo $\left(\frac{3x}{x+1}\right)^2 = t$ ottenendo così l'equazione di secondo grado:

$$t^2 - 13t + 36 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 9 \quad \vee \quad t = 4$$

Operiamo la sostituzione inversa:

- $\left(\frac{3x}{x+1}\right)^2 = 9 \quad \rightarrow \quad \frac{3x}{x+1} = 3 \quad \vee \quad \frac{3x}{x+1} = -3 \quad \rightarrow \quad 3x = 3x + 3 \quad \vee \quad 6x = -3$

  la prima equazione è impossibile, la seconda ha soluzione $x = -\frac{1}{2}$

- $\left(\frac{3x}{x+1}\right)^2 = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{3x}{x+1} = 2 \quad \vee \quad \frac{3x}{x+1} = -2 \quad \rightarrow \quad 3x = 2x + 2 \quad \vee \quad 5x = -2$

  da cui $x = 2 \quad \vee \quad x = -\frac{2}{5}$

L'insieme delle soluzioni è $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2, -\frac{2}{5}\right\}$.

2 $(x-1)^6 - 4(x-1)^3 + 3 = 0$ $\quad [S = \{2, 1 + \sqrt[3]{3}\}]$

3 $4(x+1)^4 - 37(x+1)^2 + 9 = 0$ $\quad \left[S = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -4, 2\right\}\right]$

4 $3(x-3)^4 - 24(x-3)^2 - 27 = 0$ $\quad [S = \{0, 6\}]$

5 $(x^2 - 4x)^2 + 7x(x-4) + 12 = 0$ $\quad [S = \{1, 2, 3\}]$

6 $2(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - 3 = 0$ $\quad \left[S = \left\{\frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}\right\}\right]$

7 $(x^2 + 1)^2 - 9(x^2 + 1) + 20 = 0$ $\quad [S = \{\pm 2, \pm\sqrt{3}\}]$

8 $(2x^2 - 5x + 1)^2 + 2x^2 - 5x - 1 = 0$ $\quad \left[S = \left\{0, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}\right]$

9 $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^4 - 10\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 + 9 = 0$ $\quad \left[S = \left\{-\frac{7}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}\right\}\right]$

10 $\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{2x+1}{x}\right) + 3 = 0$ $\quad [S = \{\pm 1\}]$

11 $4\left(\frac{x-2}{3x}\right)^4 - 5\left(\frac{x-2}{3x}\right)^2 + 1 = 0$ $\quad \left[S = \left\{-4, -1, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right\}\right]$

12 $(2x-1)^2 - 6(2x-1) + 5 = 0$ $\quad [S = \{1, 3\}]$

13 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$ $\quad \left[S = \left\{\frac{1}{3}\right\}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni reciproche di quarto grado complete.

14 **ESERCIZIO GUIDATO**

$4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4 = 0$

Ricordiamo la procedura per risolvere equazioni di questo tipo:

- si divide per x^2 : $4x^2 + 8x - 37 + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$
- si raccoglie a fattor comune fra i termini che hanno coefficienti uguali:
  $4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) - 37 = 0$
- si operano le seguenti sostituzioni:
  $x + \frac{1}{x} = t$ e $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ $\rightarrow$ $4(t^2 - 2) + 8t - 37 = 0$
- si risolve l'equazione di secondo grado ottenuta:
  $4t^2 + 8t - 45 = 0$ $t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 180}}{4} = \frac{-4 \pm 14}{4} = \begin{cases} -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{cases}$
- si operano le sostituzioni inverse e si risolvono le due equazioni ottenute:
  - $x + \frac{1}{x} = -\frac{9}{2}$ $\rightarrow$ $2x^2 + 9x + 2 = 0$ $\rightarrow$ $x = \frac{-9 \pm \sqrt{65}}{4}$
  - $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ $\rightarrow$ $2x^2 - 5x + 2 = 0$ $\rightarrow$ $x = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 2 \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni è quindi $S = \left\{\frac{-9 \pm \sqrt{65}}{4}, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

15 $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ $\left[S = \left\{3, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}\right\}\right]$

16 $18x^4 + 21x^3 - 94x^2 + 21x + 18 = 0$ $\left[S = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -3, -\frac{1}{3}\right\}\right]$

17 $x^4 - \frac{35}{6}x^3 + \frac{31}{3}x^2 - \frac{35}{6}x + 1 = 0$ $\left[S = \left\{3, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}\right\}\right]$

18 $x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 1 = 0$ $\left[S = \left\{\frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right\}\right]$

19 $20x^4 - 12x^3 - 55x^2 - 12x + 20 = 0$ $\left[S = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}\right]$

20 $18x^4 + 3x^3 - 154x^2 + 3x + 18 = 0$ $\left[S = \left\{-\frac{1}{3}, -3, \frac{19 \pm \sqrt{217}}{12}\right\}\right]$

21 $9x^4 - 8x^3 - 34x^2 - 8x + 9 = 0$ $\left[S = \left\{-1, \frac{13 \pm 2\sqrt{22}}{9}\right\}\right]$

22 $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$ $\left[S = \left\{2, \frac{1}{2}\right\}\right]$