I SOLIDI DI ROTAZIONE

IL CILINDRO

richiami della teoria

- Il **cilindro** è il solido generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno ad uno dei suoi lati;
- il **cilindro equilatero** ha diametro di base ed altezza congruenti;
- l'**area della superficie laterale del cilindro** è uguale al prodotto della lunghezza della circonferenza di base per la misura dell'altezza;
  formula diretta: $A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$; formule inverse: $r = A_l : (2 \cdot \pi \cdot h)$; $h = A_l : (2 \cdot \pi \cdot r)$;
- l'**area della superficie totale di un cilindro** è uguale alla somma dell'area della superficie laterale con le aree delle basi; formula diretta: $A_t = A_l + 2 \cdot A_b$; formule inverse: $A_l = A_t - 2 \cdot A_b$; $A_b = (A_t - A_l) : 2$;
- il **volume del cilindro** è uguale al prodotto dell'area del cerchio di base per la misura dell'altezza;
  formula diretta: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$; formule inverse: $r = \sqrt{V : (\pi \cdot h)}$; $h = V : (\pi \cdot r^2)$;
- le formule delle **aree delle superfici** e del **volume del cilindro equilatero** sono rispettivamente: $A_l = 4 \cdot \pi \cdot r^2$; $A_t = 6 \cdot \pi \cdot r^2$; $V = 2 \cdot \pi \cdot r^3$.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

1 Rispondi alle seguenti domande:
a. che cosa determina un punto che ruota attorno a un asse?
b. Che cosa determinano una linea, un segmento o una retta che ruotano attorno ad un asse?

2 Completa la seguente definizione:
si dice cilindro il solido generato dalla .... di un .... attorno ad uno dei suoi lati.

3 Disegna lo sviluppo della superficie totale di un cilindro.

4 Se tagliamo un cilindro con un piano α perpendicolare all'asse di rotazione, la sezione ottenuta è un ....

5 Qual è la regola che permette di determinare l'area della superficie laterale di un cilindro? Come si esprime in simboli?

6 Quale delle seguenti formule permette di determinare l'area della superficie totale di un cilindro?
a. $A_t = A_b + A_l$;
b. $A_t = 2 \cdot A_b + A_l$;
c. $A_t = (A_b + A_l) \cdot 2$.

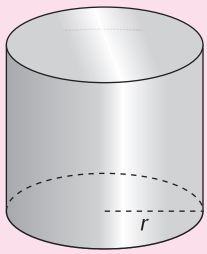
7 Quando un cilindro si dice equilatero? Come si trasformano le formule per determinare l'area della superficie laterale e totale?

8 Qual è la regola che permette di calcolare il volume di un cilindro? Come si esprime in simboli?

APPLICAZIONE

9 *Esercizio Svolto*

Le misure del raggio di base e dell'altezza di un cilindro sono rispettivamente 16 cm e 27 cm; calcola l'area della superficie totale del cilindro.



Dati	Incognita
$r = 16$ cm $h = 27$ cm	A_t

$A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = (2 \cdot \pi \cdot 16 \cdot 27)\ \text{cm}^2 = 864\pi\ \text{cm}^2$

$A_b = \pi \cdot r^2 = (\pi \cdot 16^2)\ \text{cm}^2 = 256\pi\ \text{cm}^2$

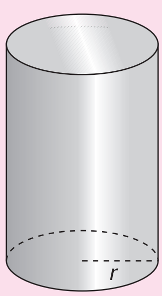
$A_t = 2 \cdot A_b + A_l = (2 \cdot 256\pi + 864\pi)\ \text{cm}^2 = 1\,376\pi\ \text{cm}^2$

10 Le misure del raggio di base e dell'altezza di un cilindro sono rispettivamente 24 cm e 36 cm; calcola l'area della superficie totale del cilindro. [$2\,880\pi$ cm²]

11 Le misure del diametro di base e dell'altezza di un cilindro sono rispettivamente 70 cm e 46 cm; calcola l'area della superficie totale del cilindro. [$5\,670\pi$ cm²]

12 *Esercizio Svolto*

L'area della superficie laterale e la misura dell'altezza di un cilindro sono rispettivamente 840π cm² e 35 cm; calcola l'area della superficie totale e il volume del cilindro.



Dati	Incognite
$A_l = 840\pi\ \text{cm}^2$ $h = 35$ cm	A_t V

Determiniamo la misura del raggio di base applicando la formula inversa dell'area della superficie laterale.

$$r = \frac{A_l}{2 \cdot \pi \cdot h} = \frac{840\cancel{\pi}}{2 \cdot \cancel{\pi} \cdot 35}\ \text{cm} = 12\ \text{cm}$$

$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 12^2\ \text{cm}^2 = 144\pi\ \text{cm}^2$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_l = (2 \cdot 144\pi + 840\pi)\ \text{cm}^2 = 1128\pi\ \text{cm}^2$

$V = A_b \cdot h = (144\pi \cdot 35)\ \text{cm}^3 = 5040\pi\ \text{cm}^3$

13 L'area della superficie laterale e la misura del raggio di base di un cilindro sono rispettivamente 2156π cm² e 22 cm; calcola l'area della superficie totale e il volume del cilindro. [$3\,124\pi$ cm²; $23\,716\pi$ cm³]

14 L'area di base di un cilindro è 324π cm²; calcola l'area della superficie totale e il volume del cilindro sapendo che l'altezza è $\frac{11}{6}$ del raggio di base. [$1\,836\pi$ cm²; $10\,692\pi$ cm³]

15 Il volume e l'altezza di un cilindro misurano rispettivamente $5\,808\pi$ cm³ e 48 cm; calcola l'area della superficie totale. [$1\,298\pi$ cm²]

16 Il volume e il raggio di base di un cilindro misurano rispettivamente $2\,592\pi$ dm³ e 9 dm; calcola l'area della superficie totale. [738π dm²]

17 Il volume e l'altezza di un cilindro misurano rispettivamente $13\,005\pi$ cm^3 e 45 cm; calcola l'area della superficie totale. [$2\,108\pi$ cm^2]

18 Un cilindro equilatero ha la misura del raggio di base di 12 cm; calcola l'area della superficie totale e il volume. [864π cm^2; $3\,456\pi$ cm^3]
(Suggerimento: il cilindro equilatero ha l'altezza congruente al diametro)

19 Un cilindro equilatero ha l'area della superficie totale di 3750π cm^2; calcola l'area della superficie laterale e il volume. [$2\,500\pi$ cm^2; $31\,250\pi$ cm^3]

20 L'area della superficie laterale di un cilindro equilatero è 4900π cm^2; calcola l'area della superficie totale e il volume. [$7\,350\pi$ cm^2; $85\,750\pi$ cm^3]

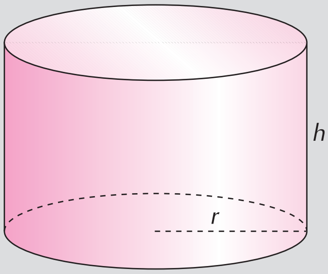
21 L'area della superficie totale di un cilindro equilatero è 2646π dm^2, calcola il volume.
(Suggerimento: un cilindro equilatero ha il diametro congruente all'altezza) [$18\,522\pi$ dm^3]

22 L'area della superficie laterale di un cilindro equilatero è 576π cm^2, calcola il volume. [$3\,456\pi$ cm^3]

23 Il volume di un cilindro equilatero è $93\,312\pi$ dm^3, calcola l'area della superficie totale.
(Attenzione alla formula inversa del volume $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$) [$7\,776\pi$ dm^2]

24 *Esercizio Guidato*

L'area di base di un cilindro è $1\,296\pi$ cm^2 e l'altezza è $\frac{5}{4}$ del raggio di base. Calcola l'area della superficie totale e il volume.



Dati	Incognite
$A_b = 1\,296\pi$ cm^2	A_t
$h = \frac{5}{4} \cdot r$	V

Ricaviamo la misura del raggio dall'area di base per poi determinare la misura dell'altezza.

$r = \sqrt{..... : \pi} = \sqrt{....... : .....}$ cm $= .....$ cm

$h = \frac{5}{4} \cdot r = \frac{5}{4} \cdot .....$ cm $= 45$ cm

$A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot ..... \cdot 45$ cm^2 $= ....$ cm^2

$A_t = 2 \cdot A_b + A_l = (2 \cdot 1\,296\pi + ...)$ cm^2 $= 5\,832\pi$ cm^2

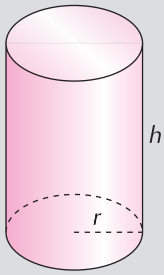
$V = A_b \cdot ..... = (1\,296\pi \cdot .....)$ cm^3 $= 58\,320\pi$ cm^3

25 Calcola l'area della superficie totale e il volume di un cilindro sapendo che l'area di base è 784π cm^2 e l'altezza è $\frac{11}{7}$ della base. [$4\,032\pi$ cm^2; $34\,496\pi$ cm^3]

26 Un cilindro ha il diametro di base lungo 30 cm mentre l'altezza è $\frac{9}{5}$ del raggio. Calcola il volume del cilindro. [$6\,075\pi$ cm^3]

27 *Esercizio Guidato*

L'area della superficie totale di un cilindro è 288π cm^2; calcola il volume sapendo che l'area di base è $\frac{1}{6}$ dell'area laterale.



Dati	Incognita
$A_t = 288\pi \text{ cm}^2$ $A_b = \frac{1}{6} \cdot A_l$	V

Determiniamo il valore dell'area di base e dell'area laterale rappresentando il rapporto con dei quadratini.

L'area della superficie totale è quindi divisa in ..... quadratini.

$A_b = A_t : ..... = (288\pi : .....) \text{ cm}^2 = ... \text{ cm}^2$

$A_l = ... \cdot 6 = ... \cdot 6 \text{ cm}^2 = 216\pi \text{ cm}^2$

$r = \sqrt{A_b : \pi} = \sqrt{36\pi : \pi} \text{ cm} = 6 \text{ cm}$

$h = A_l : (2 \cdot \pi \cdot .....) = [........ : (2 \cdot \pi \cdot .....)] \text{ cm} = 18 \text{ cm}$

$V = A_b \cdot ..... = (36\pi \cdot .....) \text{ cm}^3 = 648\pi \text{ cm}^3$

28 L'area della superficie totale di un cilindro è 448π cm²; calcola il volume sapendo che l'area di base è $\frac{1}{5}$ dell'area laterale. [$1\,280\pi$ cm³]

29 L'area della superficie totale di un cilindro è $1\,188\pi$ cm²; calcola il volume sapendo che l'area di base è $\frac{3}{5}$ dell'area laterale. [$4\,860\pi$ cm³]

30 Calcola il volume di un cilindro sapendo che l'area della superficie totale è $3\,840\pi$ dm² e il raggio è $\frac{3}{7}$ dell'altezza. [$32\,256\pi$ dm³]

31 Calcola l'area della superficie totale di un cilindro sapendo che il volume è $6\,336\pi$ cm³ e il raggio è $\frac{3}{11}$ dell'altezza. [$1\,344\pi$ cm²]

● **32** Calcola il peso di un tubo in ferro ($Ps = 7{,}89$) del diametro di 5 cm, lo spessore di 3 mm e la lunghezza di 2 m. [6 986 g]

Il cono

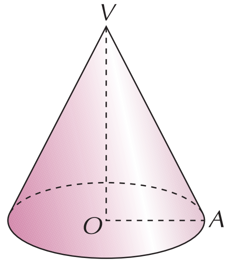
richiami della teoria

- Il **cono** è il solido generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno ad uno dei suoi cateti;
- il **cono equilatero** ha il diametro di base e l'apotema congruenti;
- l'**area della superficie laterale di un cono** è uguale al prodotto della lunghezza della semicirconferenza di base per la misura dell'apotema; formula diretta: $A_l = \pi \cdot r \cdot a$; formule inverse: $r = A_l : (\pi \cdot a)$; $a = A_l : (\pi \cdot r)$;
- l'**area della superficie totale di un cono** è uguale alla somma dell'area della superficie laterale e dell'area di base: $A_t = A_l + A_b$ oppure $A_t = \pi \cdot r \cdot (a + r)$; formule inverse: $A_l = A_t - A_b$; $A_b = A_t - A_l$;
- il **cono** è equivalente ad un terzo di un cilindro avente le misure del raggio di base e dell'altezza uguali; formula diretta: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h : 3$; formule inverse: $r = \sqrt{3 \cdot V : (\pi \cdot h)}$; $h = 3 \cdot V : (\pi \cdot r^2)$;
- le formule per il calcolo dell'**area delle superfici** e **del volume del cono equilatero** sono rispettivamente: $A_l = 2 \cdot \pi \cdot r^2$; $A_t = 3 \cdot \pi \cdot r^2$; $V = \pi \cdot r^3 \cdot \sqrt{3} : 3$.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

33 Completa la seguente definizione:
si dice cono il solido generato dalla .... di un .... attorno ad uno dei suoi cateti.

34 Aiutandoti con la figura a lato definisci i seguenti elementi del cono:
VO : ....
OA : ....
VA : ....



35 Rappresenta lo sviluppo della superficie totale di un cono.

36 Qual è la regola che permette di determinare l'area della superficie laterale di un cono? Come si esprime in simboli?

37 Quale delle seguenti formule permette di determinare l'area della superficie totale di un cono?
a. $A_t = A_b + A_l$; **b.** $A_t = A_b \cdot A_l$; **c.** $A_t = 2 \cdot A_b + A_l$; **d.** $A_t = A_l - A_b$.

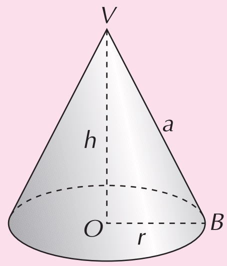
38 Quando un cono si dice equilatero? Come si trasformano le formule per determinare l'area della superficie laterale e totale?

39 Qual è la regola che permette di calcolare il volume di un cono? Come si esprime in simboli?

APPLICAZIONE

40 *Esercizio Svolto*

Un cono ha la misura del raggio di base e dell'altezza rispettivamente di 15 cm e 28 cm; calcola l'area della superficie totale e il volume.



Dati	Incognite
$\overline{OB} = r = 15$ cm	A_t
$\overline{VO} = h = 28$ cm	V

$\overline{VB} = a = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{15^2 + 28^2}$ cm $= 31{,}76$ cm

$A_l = \pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot 15 \cdot 31{,}76$ cm$^2 = 476{,}4\pi$ cm^2

$A_b = \pi \cdot r^2 = 15^2 \cdot \pi$ cm$^2 = 225\pi$ cm^2

$A_t = A_b + A_l = (225\pi + 476{,}4\pi)$ cm$^2 = 701{,}4\pi$ cm^2

$V = A_b \cdot h : 3 = (225\pi \cdot 28 : 3)$ cm$^3 = 2100\pi$ cm^3

41 Un cono ha le misure del raggio di base e dell'apotema rispettivamente di 20 cm e 43 cm; calcola l'area della superficie totale. [$1\,260\pi$ cm^2]

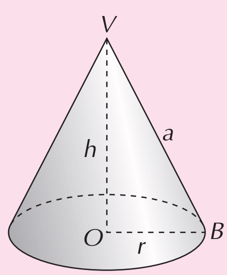
42 Un cono ha le misure del diametro di base e dell'altezza rispettivamente di 48 cm e 10 cm; calcola l'area della superficie totale e il volume. [$1\,200\pi$ cm^2; $1\,920\pi$ cm^3]

43 L'area di base di un cono è 1024π cm^2; calcola l'area della superficie totale e il volume sapendo che l'apotema misura 68 cm. [$3\,200\pi$ cm^2; $20\,480\pi$ cm^3]

44 Un cono ha la circonferenza di base e l'apotema che misurano rispettivamente 70π cm e 91 cm; calcola l'area della superficie totale e il volume. [$4\,410\pi$ cm^2; $34\,300\pi$ cm^3]

45 *Esercizio Svolto*

Il volume di un cono è 6480π cm^3 e la misura dell'altezza è 15 cm; calcola l'area della superficie totale.



Dati	Incognita
$V = 6480\pi$ cm^3	A_t
$h = \overline{VO} = 15$ cm	

Calcoliamo l'area di base applicando la formula inversa del volume

$$A_b = \frac{3 \cdot V}{h} = \frac{3 \cdot V}{\overline{VO}} = \frac{3 \cdot 6480\pi}{15} \text{ cm}^2 = 1296\pi \text{ cm}^2$$

$$r = \overline{OB} = \sqrt{\frac{A_b}{\pi}} = \sqrt{\frac{1\,296\pi}{\pi}} \text{ cm} = 36 \text{ cm}$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo VOB per determinare la misura dell'apotema:

$$a = \overline{VB} = \sqrt{\overline{VO}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{15^2 + 36^2} \text{ cm} = \sqrt{225 + 1\,296} \text{ cm} = \sqrt{1\,521} \text{ cm} = 39 \text{ cm}$$

$$A_l = \pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot \overline{OB} \cdot \overline{VB} = \pi \cdot 36 \cdot 39 \text{ cm}^2 = 1\,404\pi \text{ cm}^2$$

$$A_t = A_b + A_l = (1\,296\pi + 1\,404\pi) \text{ cm}^2 = 2700\pi \text{ cm}^2$$

46 L'area della superficie laterale di un cono è 960π cm^2; calcola l'area della superficie totale e il volume sapendo che il raggio di base misura 24 cm. [$1\,536\pi$ cm^2; $6\,144\pi$ cm^3]

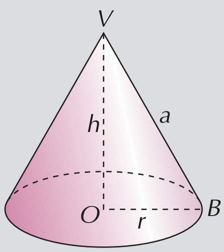
47 L'area della superficie laterale e di base di un cono sono rispettivamente $20\,535\pi$ cm^2 e $12\,321\pi$ cm^2; calcola il volume. [$607\,836\pi$ cm^3]

48 Il volume e la misura dell'altezza di un cono sono rispettivamente $5\,000\pi$ cm^3 e 37,5 cm; calcola l'area della superficie totale. [$1\,250\pi$ cm^2]

49 Il volume e la misura del raggio di base di un cono sono rispettivamente $207\,646\pi$ cm^3 e 94 cm; calcola l'area della superficie totale. [$19\,881\pi$ cm^2]

50 *Esercizio Guidato*

Calcola l'area della superficie totale e il volume di un cono sapendo che l'area di base è 324π cm^2 e il raggio di base è $\frac{3}{5}$ dell'altezza.



Dati	Incognite
$A_b = 324\pi$ cm^2	A_t
$r = \frac{3}{5} \cdot h$	V

Calcoliamo la misura del raggio di base applicando la formula inversa dell'area di base per poi calcolare la misura dell'altezza con il rapporto dato.

$r = \sqrt{A_b : \pi} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots : \pi}$ cm $= 18$ cm

$h = \frac{5}{3} \cdot r = \frac{5}{3} \cdot \ldots\ldots$ cm $= 30$ cm

$a = \overline{VB} = \sqrt{\overline{VO}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{30^2 + 18^2}$ cm $= \sqrt{900 + 324}$ cm $= \sqrt{1\,224}$ cm $= 34{,}99$ cm

$A_l = \pi \cdot \ldots\ldots \cdot a = \pi \cdot \ldots\ldots \cdot 34{,}99$ cm^2 $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ cm^2

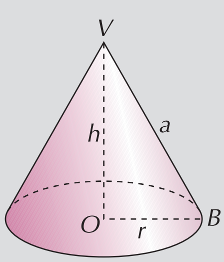
$A_t = A_b + A_l = (\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots)$ cm^2 $= 953{,}82\pi$ cm^2

$V = A_b \cdot h : \ldots\ldots = (324\pi \cdot \ldots\ldots : \ldots\ldots)$ cm^3 $= 3\,240\pi$ cm^3

51 Calcola l'area della superficie totale e il volume di un cono sapendo che l'area di base è 625π dm^2 e il raggio di base è $\frac{5}{8}$ dell'altezza. [$1\,804{,}25\pi$ dm^2; $8\,333{,}33\pi$ dm^3]

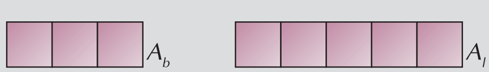
52 *Esercizio Guidato*

L'area della superficie totale di un cono è 600π cm^2; calcola il volume sapendo che l'area di base è $\frac{3}{5}$ dell'area laterale.



Dati	Incognita
$A_t = 600\pi$ cm^2	V
$A_b = \frac{3}{5} \cdot A_l$	

Determiniamo il valore dell'area di base e dell'area laterale rappresentando il rapporto con dei quadratini.



L'area della superficie totale corrisponde quindi a 8 quadratini.

$A_b = (A_t : 8) \cdot 3 = (\dots\dots\dots : \dots\dots \cdot 3)\ \text{cm}^2 = 225\pi\ \text{cm}^2$

$A_l = (A_t : 8) \cdot 5 = (600\pi : \dots\dots \cdot \dots\dots)\ \text{cm}^2 = 375\pi\ \text{cm}^2$

$r = \overline{OB} = \sqrt{A_b : \dots\dots} = \sqrt{225\pi : \dots\dots}\ \text{cm} = 15\ \text{cm}$

$a = \overline{VB} = A_l : (\pi \cdot r) = [375\pi : (\dots\dots \cdot \dots\dots)]\ \text{cm} = \dots\dots\ \text{cm}$

$h = \overline{VO} = \sqrt{\overline{VB}^2 - \overline{OB}^2} = \sqrt{25^2 - 15^2}\ \text{cm} = \sqrt{625 - 225}\ \text{cm} = \sqrt{400}\ \text{cm} = 20\ \text{cm}$

$V = \dots\dots \cdot h : 3 = (\dots\dots\dots \cdot \dots\dots : 3) = 1\,500\pi\ \text{cm}^3$

53 L'area della superficie totale di un cono è $10\,404\pi$ cm²; calcola il volume sapendo che l'area di base è $\frac{4}{5}$ dell'area laterale. [$78\,608\pi$ cm³]

54 L'area della superficie totale di un cono è $10\,584\pi$ dm², calcola il volume sapendo che l'area di base è $\frac{3}{5}$ dell'area laterale. [$111\,132\pi$ dm³]

55 Il volume di un cono equilatero è $42\,773{,}472\pi$ cm³, calcola l'area della superficie totale. [$5\,292\pi$ cm²]
(Attenzione alla formula inversa del volume $r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot \sqrt{3}}}$)

56 L'area della superficie totale di un cono equilatero è $1\,323\pi$ cm², calcola il volume. [$5\,346{,}684\pi$ cm³]

57 Calcola il volume di un cono sapendo che l'area della superficie totale è $4\,410\pi$ cm² e il raggio è $\frac{5}{13}$ dell'apotema. [$34\,300\pi$ cm³]

58 Calcola l'area della superficie totale di un cono sapendo che il volume è $81\,648\pi$ cm³ e il raggio è $\frac{9}{14}$ dell'altezza. [$8\,308{,}44\pi$ cm²]

Solidi sovrapposti

59 Un cilindro è sormontato da un cono con la base concentrica a quella del cilindro e il raggio di base e l'altezza rispettivamente $\frac{15}{16}$ e $\frac{4}{3}$ del raggio e dell'altezza del cilindro. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido sapendo che il volume del cilindro è $30\,720\pi$ cm^3 e la sua altezza misura 30 cm. [$4\,568\pi$ cm^2; $42\,720\pi$ cm^3]

60 Un solido di acciaio ($Ps = 7{,}5$) è formato da un cilindro e da un cono sovrapposto con le basi coincidenti e le altezze rispettivamente congruenti. Sapendo che la circonferenza di base è 104π cm^2 e che l'area della superficie laterale del cono è $3\,380\pi$ cm^2, calcola il peso del solido. [3 311 318,4 g]

61 In un recipiente cavo cilindrico, avente il raggio interno della base lungo 18 cm, si versa dell'acqua; in un secondo momento vi si immerge un cono che fa innalzare il livello dell'acqua di 3 cm. Calcola il volume del cono e la misura del raggio di una sfera che immersa nell'acqua ha innalzato il livello alla stessa altezza del cono. [972π cm^3; 27 cm]

62 Sulle basi di un cilindro sono appoggiati due coni congruenti con le basi concentriche con quelle del cilindro e raggio maggiore. Il raggio di base dei due coni misura 16 dm e la somma e la differenza dell'altezza del cilindro con uno dei due coni sono rispettivamente 120 dm e 60 dm. Calcola l'area della superficie totale e il peso del solido ($Ps = 2{,}5$) sapendo che il raggio del cilindro è $\frac{2}{15}$ della sua altezza. [$3\,472\pi$ dm^2; 141 928 kg]

63 La misura dello spigolo di un cubo è 42 cm. Nel cubo è praticata una cavità a forma di cono, profonda 28 cm e con la base inscritta in una faccia del cubo. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido. [11 507,16 cm^2; 61 163,76 cm^3]

64 Un solido è formato da un cilindro equilatero sormontato da un cono equilatero con la base concentrica con quella del cilindro e raggio minore rispetto a quello del cilindro di 8 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido sapendo che l'altezza del cilindro misura 40 cm. [$2\,544\pi$ cm^2; $16\,997{,}66\pi$ cm^3]

65 Un solido alto 40 cm è costituito da un cubo sormontato da un cilindro equilatero avente la base inscritta nella faccia superiore del cubo. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido. [3 656 cm^2; 14 280 cm^3]

LA SFERA

richiami della teoria

- La **sfera** è il solido generato dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro;
- la **superficie sferica** è l'insieme di tutti i punti dello spazio che hanno la stessa distanza da un punto detto **centro**;
- l'**area della superficie sferica** è equivalente alla superficie laterale del cilindro equilatero ad essa circoscritto ed è uguale a quattro volte l'area di un suo cerchio massimo; formula diretta: $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$; formula inversa: $r = \sqrt{A : (4 \cdot \pi)}$;
- il **volume della sfera** è uguale al prodotto dei $\frac{4}{3}$ di π per il cubo della misura del raggio; formula diretta: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$; formula inversa: $r = \sqrt[3]{3 \cdot V : (4 \cdot \pi)}$.

COMPRENSIONE DELLA TEORIA

66 Completa la seguente definizione:
si dice sfera il solido generato dalla .... di un .... attorno al suo ....

67 Indica quali delle seguenti affermazioni sono vere o false:

a. un piano α è esterno ad una sfera di raggio r e centro O se la distanza di O dal piano è uguale al raggio; V F

b. un piano α è esterno ad una sfera se non hanno alcun punto in comune con essa; V F

c. un piano α è tangente ad una sfera di raggio r e centro O se la distanza di O dal piano è uguale al raggio V F

d. un piano α è tangente ad una sfera se hanno in comune un segmento; V F

e. un piano α è secante ad una sfera di raggio r e centro O se la distanza di O dal piano è maggiore del raggio; V F

f. un piano α è secante ad una sfera se hanno tutti i punti di un cerchio in comune. V F

68 Qual è la regola che permette di determinare l'area della superficie della sfera? Come si esprime in forma simbolica?

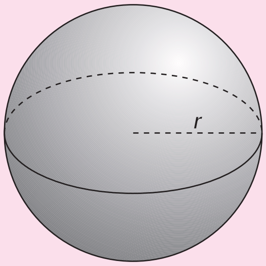
69 Quale delle seguenti formule permette di calcolare il volume della sfera?

a. $V = \frac{4}{5} \cdot \pi \cdot r^3$; **b.** $V = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot r^3$; **c.** $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$; **d.** $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^2$.

APPLICAZIONE

70 *Esercizio Svolto*

La circonferenza massima di una sfera misura 46π cm; calcola l'area della superficie sferica e il volume della sfera.



Dato	Incognite
$C_{massima} = 46\pi$ cm	A V

Calcoliamo la misura del raggio della sfera che equivale al raggio della circonferenza massima.

$r = C_{massima} : 2\pi = (46\pi : 2\pi)$ cm $= 23$ cm

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = (4 \cdot \pi \cdot 23^2)$ cm$^2 = 2116\pi$ cm^2

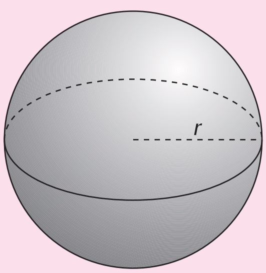
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 23^3\right)$ cm$^3 = 16\,222,\overline{6}\pi$ cm^3

71 La circonferenza massima di una sfera misura 84π cm; calcola l'area della superficie sferica e il volume della sfera. [$7\,056\pi$ cm^2; $98\,784\pi$ cm^3]

72 La circonferenza massima di una sfera misura 200,96 cm; calcola l'area della superficie sferica e il volume della sfera. [$4\,096\pi$ cm^2; $43\,690,\overline{6}\pi$ cm^3]

73 *Esercizio Svolto*

Calcola il volume di una sfera sapendo che l'area della superficie sferica è 1764π cm^2.



Dato	Incognita
$A = 1764\pi$ cm^2	V

Per calcolare la misura del raggio, applichiamo la formula inversa:

$r = \sqrt{A : 4\pi} = \sqrt{1764\pi : (4\pi)}$ cm $= \sqrt{441}$ cm $= 21$ cm

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 21^3$ cm$^3 = 12\,348\pi$ cm^3

74 Calcola la misura del raggio di una sfera sapendo che l'area della superficie sferica è 1296π cm^2. [18 cm]

75 Calcola il volume di una sfera sapendo che l'area della superficie sferica è $11\,664\pi$ cm^2. [$209\,952\pi$ cm^3]

76 Calcola il volume di una sfera sapendo che l'area della superficie sferica è $2\,826$ cm^2. [$4\,500\pi$ cm^3]

77 Il volume di una sfera è $62\,208\pi$ cm^3; calcola la misura del raggio. [36 cm]

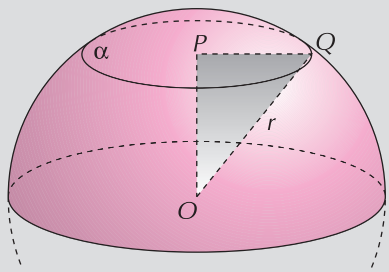
78 Calcola la misura del diametro di una sfera il cui volume è $2\,304\pi$ dm^3. [24 cm]

79 Il volume di una sfera è $333\,396\pi$ cm^3; calcola l'area della superficie sferica. [$15\,876\pi$ cm^2]

80 Il volume di una sfera è $24\,416,64$ cm^3; calcola l'area della superficie sferica. [$1\,296\pi$ cm^2]

81 *Esercizio Guidato*

Un piano α secante una sfera forma per intersezione una circonferenza lunga 48π cm; sapendo che la distanza del piano dal centro della sfera misura 32 cm, calcola l'area della superficie sferica e il volume della sfera.



Dati	Incognite
$C_{intersezione} = 48\pi$ cm	A
$\overline{OP} = 32$ cm	V

$\overline{PQ} = C_{intersezione} : ..... = (........ : 2\pi)$ cm $= 24$ cm

$\overline{OQ} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2} = \sqrt{..... + 24^2}$ cm $= .....$ cm

$A = 4 \cdot \pi \cdot .... = 4 \cdot \pi \cdot .....$ cm$^2 = 6400\pi$ cm^2

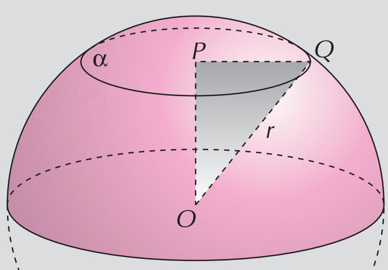
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot ..... = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot .....$ cm$^3 = 85\,333{,}\overline{3}\pi$ cm^3

82 Un piano α secante una sfera forma per intersezione una circonferenza lunga 108π dm; sapendo che la distanza del piano dal centro della sfera misura 72 dm, calcola l'area della superficie sferica e il volume della sfera. [$32\,400\pi$ dm^2; $972\,000\pi$ dm^3]

83 Un piano α secante una sfera forma per intersezione un cerchio d'area 6561π cm^2; sapendo che la distanza del piano dal centro della sfera è 108 cm, calcola l'area della superficie sferica e il volume della sfera. [$72\,900\pi$ cm^2; $3\,280\,500\pi$ cm^3]

84 *Esercizio Guidato*

L'area della superficie sferica è 10816π cm^2; calcola l'area del cerchio intersezione formato da un piano α secante la sfera, sapendo che la sua distanza dal centro della sfera misura 20 cm.



Dati	Incognita
$A = 10816\pi$ cm^2	$A_{intersezione}$
$\overline{OP} = 20$ cm	

$\overline{OQ} = \sqrt{A : .....} = \sqrt{10816\pi : 4\pi}$ cm $= \sqrt{.......}$ cm $= 52$ cm

$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - .....} = \sqrt{52^2 - 20^2}$ cm $- \sqrt{2304}$ cm $= .....$ cm

$A_{intersezione} = \pi \cdot \overline{PQ}^2 = \pi \cdot ....$ cm$^2 = 2304\pi$ cm^2

85 L'area della superficie sferica è $93\,636\pi$ cm^2; calcola l'area del cerchio intersezione formato da un piano α secante la sfera, sapendo che la sua distanza dal centro della sfera misura 72 cm. [$18\,225\pi$ cm^2]

86 Il volume di una sfera è 4500π cm^3; calcola l'area del cerchio intersezione formato da un piano α secante la sfera, sapendo che la sua distanza dal centro della sfera misura 12 cm. [81π cm^2]

GLI ALTRI SOLIDI DI ROTAZIONE

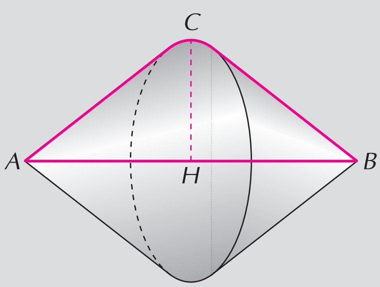
richiami della teoria

- La rotazione di un:
  a. **triangolo rettangolo attorno all'ipotenusa** genera due coni sovrapposti con la base in comune; formule: $A_{(solido)} = A_{l_1} + A_{l_2}$; $V_{(solido)} = V_1 + V_2$;
  b. **triangolo isoscele attorno alla base** genera due coni congruenti sovrapposti con la base in comune; formule: $A_{(solido)} = 2 \cdot A_{l_1}$; $V_{(solido)} = 2 \cdot V_1$;
  c. **triangolo ottusangolo attorno al prolungamento del suo lato** genera un cono con una cavità a forma conica; formule: $A_{(solido)} = A_{l_1} + A_{l_2}$; $V_{(solido)} = V_1 - V_2$;
  d. **trapezio rettangolo attorno alla base maggiore** genera un cilindro e un cono sovrapposto con la base in comune; formule: $A_{(solido)} = A_{l(cilindro)} + A_{l(cono)} + A_{b(cilindro)}$; $V_{(solido)} = V_{(cilindro)} + V_{(cono)}$;
  e. **trapezio rettangolo attorno alla base minore** genera un cilindro e un cono in esso cavo; formule: $A_{(solido)} = A_{l(cilindro)} + A_{l(cono)} + A_{b(cilindro)}$; $V_{(solido)} = V_{(cilindro)} - V_{(cono)}$;
  f. **trapezio isoscele attorno alla base maggiore** genera un cilindro e due coni sovrapposti con la base in comune; formule: $A_{(solido)} = A_{l(cilindro)} + 2 \cdot A_{l(cono)}$; $V_{(solido)} = V_{(cilindro)} + 2 \cdot V_{(cono)}$;
  g. **trapezio isoscele attorno alla base minore** genera un cilindro e due coni in esso cavi; formule: $A_{(solido)} = A_{l(cilindro)} + 2 \cdot A_{l(cono)}$; $V_{(solido)} = V_{(cilindro)} - 2 \cdot V_{(cono)}$.

APPLICAZIONE

87 *Esercizio Guidato*

Il perimetro e la misura della base di un triangolo isoscele sono rispettivamente 112 cm e 42 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo attorno alla base.



Dati	Incognite
$2p_{(ABC)} = 112$ cm	$A_{(solido)}$
$\overline{AB} = 42$ cm	$V_{(solido)}$

Il triangolo isoscele *ABC* ruotando di 360° attorno alla base *AB* genera due coni congruenti con le basi coincidenti, aventi come raggio l'altezza *CH*, come altezza le semibasi *AH* e *HB* e come apotema i lati *AC* e *BC*.

$\overline{AC} = \left(2p - \overline{AB}\right) : 2 = [(\ldots.. - \ldots..) : 2]$ cm $= 35$ cm

$\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{HB}^2} = \sqrt{\ldots.. - 21^2}$ cm $= \sqrt{\ldots.. - 441}$ cm $= \sqrt{784}$ cm $= 28$ cm

$A_{l\ cono} = \pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot \overline{CH} \cdot \overline{CB} = (\pi \cdot \ldots.. \cdot \ldots..)$ cm$^2 = 980\pi$ cm^2

$A_{solido} = 2 \cdot \ldots\ldots\ldots = (2 \cdot \ldots\ldots.)$ cm$^2 = 1960\pi$ cm^2

$V_{cono} = \dfrac{A_b \cdot h}{3} = [(\pi \cdot \ldots..) \cdot BH : 3] = [(\pi \cdot \ldots..) \cdot 21 : 3]$ cm$^3 = 5488\pi$ cm^3

$V_{solido} = 2 \cdot V_{cono} = (2 \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$ cm$^3 = 10976\pi$ cm^3

88 Un triangolo isoscele ha l'area di 480 cm^2 e la misura dell'altezza di 30 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo attorno alla base. [$2\,040\pi$ cm^2; $9\,600\pi$ cm^3]

89 Un trapezio rettangolo ha l'area di 300 cm^2 e la misura delle due basi rispettivamente 18 cm e 42 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido generato dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore. [720π cm^2; $2\,600\pi$ cm^3]

90 In un triangolo rettangolo la somma dei cateti è 63 cm e la loro differenza 9 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del triangolo attorno all'ipotenusa. [$1\,360\pi$ cm^2; $6\,998{,}4\pi$ cm^3]

91 In un trapezio isoscele la base maggiore e l'altezza misurano rispettivamente 156 cm e 36 cm e il lato obliquo è $\frac{1}{4}$ della base maggiore. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido generato dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore. [$11\,880\pi$ cm^2; $176\,256\pi$ cm^3]

92 L'area della superficie totale di un solido generato dalla rotazione completa di un trapezio rettangolo attorno alla base minore è 10080π cm^2. Calcola il volume del solido sapendo che la differenza delle due basi e il lato obliquo del trapezio misurano rispettivamente 40 cm e 58 cm. [$147\,000\pi$ cm^3]

93 Un triangolo rettangolo ha un cateto e l'altezza relativa all'ipotenusa che misurano rispettivamente 12 cm e 9,6 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del triangolo attorno all'ipotenusa. [$268{,}8\pi$ cm^2; $614{,}4\pi$ cm^3]

94 In un trapezio isoscele l'altezza è lunga 15 cm, la somma e la differenza delle due basi misurano rispettivamente 40 cm e 16 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base maggiore. [870π cm^2; $3\,900\pi$ cm^3]

95 In un trapezio isoscele la somma e la differenza delle due basi misurano rispettivamente 38 cm e 16 cm ed il perimetro è 58 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa del trapezio attorno alla base minore. [444π cm^2; 780π cm^3]

96 In un triangolo isoscele il rapporto tra un lato obliquo e la base è $\frac{5}{6}$ e la loro differenza è 3 cm. Calcola l'area della superficie totale e il volume del solido ottenuto facendo ruotare il triangolo di 360° attorno ad uno dei lati congruenti. [$475{,}2\pi$ cm^2; $1\,036{,}8\pi$ cm^3]