La costruzione dell'insieme *C*

L'insieme C dei numeri complessi è un ampliamento dell'insieme R dei numeri reali; di seguito diamo qualche indicazione sulla sua costruzione che ci permetterà di dare una giustificazione sul significato del numero i e sul fatto che $i^2 = -1$.
Consideriamo l'insieme $R \times R$ delle coppie ordinate (a, b) di numeri reali a e b e introduciamo in esso una relazione di uguaglianza e le operazioni di addizione e moltiplicazione secondo le seguenti definizioni.

- **Relazione di uguaglianza**. Due coppie (a, b) e (c, d) sono uguali quando hanno ordinatamente uguali gli elementi:
$$(a, b) = (c, d) \qquad \text{se e solo se} \qquad a = c \ \wedge \ b = d$$
- **Addizione**. Somma della coppia (a, b) con la coppia (c, d) è la coppia i cui elementi si ottengono sommando i primi elementi fra loro e i secondi elementi fra loro:
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
- **Moltiplicazione**. Prodotto della coppia (a, b) con la coppia (c, d) è la coppia che si ottiene con la seguente regola:
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Per esempio:

- $(2, 4) + (1, -5) = (2 + 1, 4 - 5) = (3, -1)$
- $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) + \left(\frac{5}{4}, 3\sqrt{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}, \sqrt{2} + 3\sqrt{2}\right) = \left(\frac{3}{4}, 4\sqrt{2}\right)$
- $(3, 1) \cdot (-2, 4) = [3 \cdot (-2) - 1 \cdot 4, 3 \cdot 4 + 1(-2)] = (-10, 10)$

Chiamiamo **numero complesso** tutte le coppie ordinate (a, b) di numeri reali per le quali valgono la relazione di uguaglianza e le operazioni di addizione e moltiplicazione precedentemente introdotte.

L'**elemento neutro dell'addizione** è la coppia $(0, 0)$; infatti: $(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$

Ogni numero complesso (a, b) ha quindi il suo opposto che è $(-a, -b)$; infatti
$$(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$$

L'**elemento neutro della moltiplicazione** è la coppia $(1, 0)$; infatti:
$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$$

Ogni numero complesso (a, b) ha quindi il suo reciproco che è il numero (h, k) per il quale vale la relazione:
$$(a, b) \cdot (h, k) = (1, 0) \qquad \text{cioè} \qquad (ah - bk, ak + bh) = (1, 0)$$

Deve quindi essere $\begin{cases} ah - bk = 1 \\ ak + bh = 0 \end{cases}$ e risolvendo il sistema rispetto ad h e h si ottiene: $\begin{cases} h = \dfrac{a}{a^2 + b^2} \\ k = \dfrac{-b}{a^2 + b^2} \end{cases}$

Il reciproco del numero complesso (a, b) è quindi il numero $\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$.

Possiamo quindi definire le operazioni di sottrazione e divisione.

- **Sottrazione**. Dati i numeri complessi (a, b) e (c, d), si dice loro **differenza** la somma del primo con l'opposto del secondo:
$$(a, b) - (c, d) = (a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d)$$
- **Divisione**. Dati i numeri complessi (a, b) e (c, d), si dice loro **quoziente** il prodotto del primo per il reciproco del secondo:
$$(a, b) : (c, d) = (a, b) \cdot \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2}\right) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

Per esempio:

- $(3, 2) - \left(\frac{2}{3}, 4\right) = \left(3 - \frac{2}{3}, 2 - 4\right) = \left(\frac{7}{3}, -2\right)$
- $(5, -2) : (4, 3)$

  calcoliamo il reciproco di $(4, 3)$: $\left(\frac{4}{16+9}, \frac{-3}{16+9}\right) = \left(\frac{4}{25}, -\frac{3}{25}\right)$

  eseguiamo la divisione:

  $(5, -2) : (4, 3) = (5, -2) \cdot \left(\frac{4}{25}, -\frac{3}{25}\right) = \left(5 \cdot \frac{4}{25} - 2 \cdot \frac{3}{25}, -5 \cdot \frac{3}{25} - 2 \cdot \frac{4}{25}\right) = \left(\frac{14}{25}, -\frac{23}{25}\right)$

L'insieme dei numeri complessi è un ampliamento dell'insieme R dei numeri reali in quanto a tutte le coppie della forma $(a, 0)$ si può far corrispondere il numero reale a:

$$(a, 0) \quad \rightarrow \quad a$$

Puoi verificare da solo che questa corrispondenza si mantiene quando si eseguono, in base alle regole fissate, le operazioni di addizione e moltiplicazione. Appare però evidente che la semplificazione di qualsiasi espressione con i numeri complessi scritti nella loro forma di coppia è piuttosto laboriosa; osserviamo allora che ogni numero complesso (a, b) si può vedere a sua volta come somma di altri due numeri complessi:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

e che inoltre: $(a, 0) = (a, 0) \cdot (1, 0) = a \cdot (1, 0)$ e $(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = b \cdot (0, 1)$

Dunque un numero complesso (a, b) si può scrivere nella forma $(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)$

vale a dire che le coppie $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono i "mattoni" con i quali si costruisce qualunque numero complesso (a, b). Per esempio:

- $(5, 6) = 5 \cdot (1, 0) + 6 \cdot (0, 1)$
- $\left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot (1, 0) - \frac{4}{5} \cdot (0, 1)$

Il numero complesso $(1, 0)$, che corrisponde al numero reale 1, è l'**unità reale**.
Il numero complesso $(0, 1)$ si dice **unità immaginaria** e si rappresenta con il simbolo i.

In base a questa nuova notazione, ogni numero complesso (a, b) può essere scritto in una forma che mette in evidenza l'unità reale e l'unità immaginaria

$$\boxed{(a, b)} = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i = \boxed{a + ib}$$

Abbiamo così ritrovato la forma algebrica del numero complesso.

Verifichiamo adesso che $i^2 = -1$:

$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$ che corrisponde al numero reale -1

Abbiamo dunque trovato la giustificazione del fatto che $i^2 = -1$.