Concetti chiave e regole

Gli insiemi di numeri reali

Un insieme E di numeri reali si dice:

- **limitato superiormente** se esiste un numero k, non necessariamente appartenente a E, che è maggiore di tutti gli elementi di E
- **limitato inferiormente** se esiste un numero h, non necessariamente appartenente a E, che è minore di tutti gli elementi di E.

  Un insieme che è limitato sia inferiormente che superiormente si dice semplicemente **limitato**.
- L'**estremo inferiore** di un insieme E è il più grande dei numeri h e, se appartiene all'insieme, è il **minimo** di E.
- L'**estremo superiore** di un insieme E è il più piccolo dei numeri k e, se appartiene all'insieme, è il **massimo** di E.

Intervalli

Si chiama **intervallo** un qualunque insieme di numeri reali compresi fra altri due a e b, dove a o b possono essere finiti o infiniti. In particolare:

- (a, b) è un intervallo aperto che corrisponde all'insieme degli x tali che $a < x < b$
- $[a, b]$ è un intervallo chiuso che corrisponde all'insieme degli x tali che $a \leq x \leq b$

In pratica, la parentesi tonda indica che l'estremo dell'intervallo non appartiene all'insieme, la parentesi quadra indica che gli appartiene; sui simboli di ∞ si usa solo la parentesi tonda.

Funzioni

Una **funzione** è una corrispondenza univoca fra un insieme D di elementi x ed un insieme E di elementi y, cioè è una legge che ad ogni elemento di D associa uno e un solo elemento di E.
Se D ed E sono insiemi numerici, la legge che lega y ad x si può esprimere mediante una relazione algebrica nella forma $y = f(x)$.
L'elemento y che corrisponde ad un particolare x si dice **immagine** di x; l'insieme delle immagini è il **codominio** della funzione.
Ogni elemento x che resta associato ad un elemento y si dice **controimmagine**; l'insieme delle controimmagini rappresenta l'**insieme di definizione** della funzione.

Una funzione $f: D \to E$ si dice:

- **suriettiva** se $f(D) = E$
- **iniettiva** se a elementi distinti in D corrispondono elementi distinti in E
- **biiettiva** se è iniettiva e suriettiva.

Le funzioni biiettive sono corrispondenze biunivoche e sono le sole funzioni invertibili.

Se una funzione $f(x)$ è definita in un punto x_0 e si verifica che:

- $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni x del dominio, allora si dice che x_0 è un **punto di massimo assoluto** e che $f(x_0)$ è il massimo assoluto della funzione
- $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni x del dominio, allora si dice che x_0 è un **punto di minimo assoluto** e che $f(x_0)$ è il minimo assoluto della funzione.

Diciamo poi che una funzione è:

- **pari** se $f(-x) = f(x)$ ed allora il suo grafico presenta una simmetria rispetto all'asse y
- **dispari** se $f(-x) = -f(x)$ ed allora il suo grafico presenta una simmetria rispetto all'origine.
- **periodica** di periodo k se $f(x + k) = f(x)$

In particolare, le funzioni:

– $\sin kx$ e $\cos kx$ sono periodiche di periodo $\frac{2\pi}{k}$

– $\tan kx$ e $\text{cotan}\, kx$ sono periodiche di periodo $\frac{\pi}{k}$.

Funzioni crescenti e decrescenti

Una funzione $f(x)$ di dominio D è:

- **crescente** in un intervallo $I \subseteq D$ se $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) < f(x_2)$
  Se in quest'ultima relazione vale anche il segno di uguaglianza, cioè se $f(x_1) \leq f(x_2)$, allora la funzione è monotòna non decrescente, cioè in pratica cresce o tutt'al più si mantiene costante, ma non decresce mai
- **decrescente** in un intervallo $I \subseteq D$ se $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ si ha che $f(x_1) > f(x_2)$
  Se in quest'ultima relazione vale anche il segno di uguaglianza, cioè se $f(x_1) \geq f(x_2)$, allora la funzione è monotòna non crescente, cioè in pratica decresce o tutt'al più si mantiene costante, ma non cresce mai