

Le equazioni di Bernoulli

Un'equazione si dice **di Bernoulli** se è del primo ordine ed assume la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni continue in un intervallo I e possiamo supporre che n sia diverso da 0 e da 1 per non rientrare nel caso delle equazioni lineari.

Un'equazione di questo tipo ammette sempre fra le sue soluzioni la funzione $y = 0$ (basta sostituire per verificarlo) e, dividendo per il termine y^n (possiamo supporre che sia $y \neq 0$ visto che abbiamo già individuato la soluzione $y = 0$), la si può ricondurre ad un'equazione lineare. Con tale operazione otteniamo infatti

$$y' \cdot y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

Se adesso operiamo un cambiamento di variabile ponendo $y^{1-n} = t$, si ha che

$$t' = (1-n)y^{-n} y' \quad \text{cioè} \quad y' = \frac{y^n}{1-n} \cdot t'$$

e quindi l'equazione diventa $\frac{1}{1-n} \cdot t' + p(x)t = q(x)$

che è un'equazione lineare non omogenea nell'incognita t .

Ad ogni integrale di questa equazione corrisponde allora un integrale di quella di Bernoulli che ha la forma

$$y = [t(x, c)]^{\frac{1}{1-n}}$$

Risolviamo, ad esempio, l'equazione di Bernoulli $y' - 2y = x\sqrt{y}$ in cui $n = \frac{1}{2}$.

Abbiamo detto che la funzione $y = 0$ è un integrale particolare; per trovare l'integrale generale dividiamo entrambi i membri dell'equazione per \sqrt{y} ottenendo

$$\frac{1}{\sqrt{y}} y' - 2\sqrt{y} = x$$

Posto $t = \sqrt{y}$, si ha che $t' = \frac{1}{2\sqrt{y}} y'$, cioè $y' = 2t \cdot t'$. L'equazione assume quindi la forma

$$2t' - 2t = x \quad \text{cioè} \quad t' - t = \frac{x}{2}$$

Questa è un'equazione lineare non omogenea nell'incognita t in cui $p(x) = -1$ e $q(x) = \frac{x}{2}$; il suo integrale generale si determina applicando la formula risolutiva nota ed è

$$t = e^{-\int -dx} \left[\int \frac{x}{2} \cdot e^{\int -dx} dx + c \right] = e^x \left[\int \frac{x}{2} \cdot e^{-x} dx + c \right] = -\frac{x+1}{2} + c e^x$$

L'integrale generale dell'equazione data è quindi $y = t^2$, cioè $y = \left[-\frac{x+1}{2} + c e^x \right]^2$

ESERCIZI

Dopo aver verificato che le seguenti equazioni sono di Bernoulli, determina il loro integrale generale.

1 ESERCIZIO GUIDATO

$$xy' - 2y - x^2y^2 = 0$$

L'equazione può essere riscritta nella forma $y' - \frac{2}{x}y = xy^2$ ed è quindi di Bernoulli con $n = 2$.

L'equazione ammette fra le sue soluzioni la funzione $y = 0$.

Procediamo ora alla determinazione dell'integrale generale.

- Dividiamo entrambi i membri per y^2 : $y' \cdot y^{-2} - \frac{2}{x}y^{-1} = x$
- Poniamo $y^{-1} = t$ da cui, derivando entrambi i membri, troviamo che $y' = -y^2t'$
- In questo modo l'equazione diventa $t' + \frac{2}{x}t = -x$ ed ha soluzione $t = \frac{c}{x^2} - \frac{x^2}{4}$

L'integrale generale dell'equazione data è quindi: $y = t^{-1} = \frac{4x^2}{4c - x^4}$.

$$2 \quad y' - 5y = x^2\sqrt{y}$$

$$\left[y = \left(-\frac{25x^2 + 20x + 8}{125} + e^{\frac{5}{2}x}c \right)^2 \right]$$

$$3 \quad y' - y \sin x = y^2 \sin x$$

$$\left[y = \frac{1}{ce^{\cos x} - 1} \right]$$

$$4 \quad 2xy' - y^2 \ln x - 2y = 0$$

$$\left[y = \frac{2x}{x - x \ln x + c} \right]$$

$$5 \quad xy' = y(1 - y^2)$$

$$\left[y = \pm \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + c}} \right]$$

$$6 \quad -3xy' + 6y = -3x^2y^3$$

$$\left[y = \pm \sqrt{\frac{3x^4}{3c - x^6}} \right]$$

$$7 \quad y' - \frac{3}{x}y = -4xy^2$$

$$\left[y = \frac{5x^3}{4x^5 + c} \right]$$

$$8 \quad y' - \frac{2}{x}y = (x - 3)y^2$$

$$\left[y = \frac{4x^2}{c - x^4 + 4x^3} \right]$$