Concetti chiave e regole

Lo studio di funzione

Per studiare in modo completo una funzione $f(x)$ si deve:

- determinare l'insieme di definizione D
- stabilirne le eventuali periodicità e simmetrie (funzioni pari e dispari)
- studiare il comportamento agli estremi degli intervalli dell'insieme D e trovare gli eventuali asintoti
- studiare il segno della funzione e determinare le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani
- trovare i punti di massimo e di minimo
- trovare i punti di flesso e studiare la concavità

Occorre poi tenere presente che:

- tutte le equazioni e le disequazioni che man mano si affrontano devono essere risolte nell'ambito del dominio della funzione
- nel nostro percorso abbiamo prima calcolato i limiti della funzione ed i suoi asintoti e poi abbiamo studiato il segno, ma questi due passaggi possono anche essere invertiti
- spesso lo studio della derivata seconda non è indispensabile se il comportamento della funzione è già ben delineato dall'individuazione dei punti di massimo e di minimo
- nel caso ci sia simmetria rispetto all'asse y oppure rispetto all'origine, conviene studiare la funzione solo per $x \geq 0$ e poi rappresentare il suo grafico completo sfruttando tali simmetrie
- se una funzione è periodica di periodo T, conviene studiarla in un intervallo pari a T
- l'individuazione delle coordinate di qualche punto è spesso utile per ottenere un grafico migliore.

I grafici deducibili

Tracciato il grafico C di una funzione $f(x)$, da esso si possono dedurre quelli di:

- $y = |f(x)|$ mediante una simmetria rispetto all'asse x delle parti negative di C
- $y = -f(x)$ mediante una simmetria rispetto all'asse x
- $y = f(x) + k$ mediante una traslazione di vettore $\vec{v} = (0,\ k)$
- $y = f(x + h)$ mediante una traslazione di vettore $\vec{v} = (-h,\ 0)$
- $y = f(|x|)$ mediante una simmetria rispetto all'asse y della sola parte di C che appartiene al semiasse positivo delle ascisse.

La formula di Taylor

Una funzione $f(x)$ può essere approssimata nell'intorno di un punto c mediante un polinomio di grado n che si ottiene con la formula di Taylor:

$$P_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

I metodi di risoluzione approssimata di un'equazione

Una volta accertato che in $(a,\ b)$ l'equazione $f(x) = 0$ ammette una sola soluzione reale r, per trovare un suo valore approssimato si possono seguire diversi metodi.

Metodo di bisezione

- si divide $(a,\ b)$ in due parti uguali considerando il punto medio $\dfrac{a+b}{2}$

- si calcola $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

- se $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, allora la soluzione r appartiene all'intervallo $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, altrimenti appartiene all'intervallo $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$

Si ripete il procedimento sul nuovo intervallo fino ad ottenere la precisione desiderata.

Metodo delle corde o delle secanti

Questo metodo si può usare se la funzione $f(x)$ è derivabile due volte in (a, b); in questo caso, si presentano due possibili situazioni:

- $f''(x)$ e $f(a)$ hanno segni opposti per ogni $x \in (a, b)$

  la soluzione r è il valore a cui converge la successione $\begin{cases} c_0 = a \\ c_n = c_{n-1} - \dfrac{f(c_{n-1}) \cdot (b - c_{n-1})}{f(b) - f(c_{n-1})} \end{cases}$

- $f''(x)$ e $f(a)$ hanno lo stesso segno per ogni $x \in (a, b)$

  la soluzione r è il valore a cui converge la successione $\begin{cases} c_0 = b \\ c_n = c_{n-1} - \dfrac{f(c_{n-1}) \cdot (a - c_{n-1})}{f(a) - f(c_{n-1})} \end{cases}$

Metodo delle tangenti o metodo di Newton

Anche questo metodo si può usare se la funzione $f(x)$ è derivabile due volte in (a, b) e si presentano due possibili situazioni:

- $f''(x)$ e $f(a)$ hanno segni opposti per ogni $x \in (a, b)$

  la soluzione r è il valore a cui converge la successione $\begin{cases} d_0 = b \\ d_n = d_{n-1} - \dfrac{f(d_{n-1})}{f'(d_{n-1})} \end{cases}$

- $f''(x)$ e $f(a)$ hanno lo stesso segno per ogni $x \in (a, b)$

  la soluzione r è il valore a cui converge la successione $\begin{cases} d_0 = a \\ d_n = d_{n-1} - \dfrac{f(d_{n-1})}{f'(d_{n-1})} \end{cases}$