MATEMATICA*per*TUTTI

I sistemi di primo grado

1 **ESERCIZIO SVOLTO**

Un'equazione che ha due incognite, x e y, salvo casi particolari, ha sempre infinite soluzioni rappresentate da tutte le coppie (x, y) che la soddisfano.
Se di equazioni ne abbiamo due, potrebbero esistere delle coppie che le soddisfano entrambe; cercare queste coppie significa risolvere il **sistema** formato dalle due equazioni. Le equazioni che devono essere risolte in sistema si scrivono una sotto l'altra racchiudendole sulla sinistra con una parentesi graffa aperta.
Il **grado di un sistema** è il prodotto dei gradi delle equazioni che lo formano; per avere un sistema di primo grado, detto anche sistema lineare, tutte le equazioni devono essere di primo grado.

I metodi di risoluzione di un sistema di questo tipo sono:

- il metodo di sostituzione
- il metodo del confronto
- il metodo di riduzione
- il metodo di Cramer.

Tutti i metodi sono ugualmente validi, ma in alcune occasioni è preferibile usare un metodo piuttosto che un altro per semplificare il calcolo.

Per ricordare come si applica ciascun metodo, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 5x + 3y = -7 \end{cases}$$

e risolviamolo in tutti e quattro i modi.

Metodo di sostituzione

Ricaviamo una delle incognite, per esempio x che ha coefficiente 1, dalla prima equazione

$$\begin{cases} x = 2y - 4 \\ 5x + 3y = -7 \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione trovata al posto di x nella seconda equazione

$$\begin{cases} x = 2y - 4 \\ 5(2y - 4) + 3y = -7 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione che contiene solo la variabile y

$$\begin{cases} x = 2y - 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Sostituiamo 1 al posto di y nella prima equazione

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Metodo del confronto

Ricaviamo la variabile x dalle due equazioni
$$\begin{cases} x = 2y - 4 \\ x = -\dfrac{3y+7}{5} \end{cases}$$

Uguagliamo le due espressioni di x che abbiamo ottenuto $\quad 2y - 4 = -\dfrac{3y+7}{5}$

Ricaviamo la variabile y dalle due equazioni
$$\begin{cases} y = \dfrac{x+4}{2} \\ y = -\dfrac{5x+7}{3} \end{cases}$$

Uguagliamo le due espressioni di y che abbiamo ottenuto $\quad \dfrac{x+4}{2} = -\dfrac{5x+7}{3}$

Associamo le due equazioni ottenute dal confronto
$$\begin{cases} 2y - 4 = -\dfrac{3y+7}{5} \\ \dfrac{x+4}{2} = -\dfrac{5x+7}{3} \end{cases}$$

Troviamo la soluzione del sistema risolvendo ciascuna delle equazioni ottenute in cui compare una sola variabile
$$\begin{cases} 10y - 20 = -3y - 7 \\ 3x + 12 = -10x - 14 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 13y = 13 \\ 13x = -26 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è la coppia $(-2,\ 1)$ quindi $S = \{(-2,\ 1)\}$.

Metodo di riduzione

Consiste nel sommare i due membri delle equazioni del sistema con il fine di eliminare una delle variabili. È conveniente applicare questo metodo quando una delle due variabili ha coefficienti opposti nelle due equazioni: se ciò non accade, bisogna moltiplicare opportunamente le due equazioni in modo da ricondurci in questa situazione. Nel nostro caso dobbiamo:

moltiplicare i due membri della prima equazione per 5
$$\begin{matrix} \cdot\,\mathbf{5} \\ \end{matrix}\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 5x + 3y = -7 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -5x + 10y = 20 \\ 5x + 3y = -7 \end{cases}$$

Sommare membro a membro le due equazioni
$$+\begin{cases} -5x + 10y = 20 \\ 5x + 3y = -7 \end{cases}$$
$$0 + 13y = 13 \quad \rightarrow \quad y = 1$$

Moltiplicare la prima equazione per 3 e la seconda per (-2)
$$\begin{matrix} \cdot\,\mathbf{3} \\ \cdot(-\mathbf{2}) \end{matrix}\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 5x + 3y = -7 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -3x + 6y = 12 \\ -10x - 6y = 14 \end{cases}$$

Sommare membro a membro le due equazioni
$$+\begin{cases} -3x + 6y = 12 \\ -10x - 6y = 14 \end{cases}$$
$$-13x + 0 = 26 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

La soluzione del sistema è la coppia $(-2,\ 1)$ quindi $S = \{(-2,\ 1)\}$.

Metodo di Cramer

Questo metodo ha il vantaggio di rappresentare in modo schematico le soluzioni di un sistema; per applicarlo devi:

- calcolare il determinante della matrice dei coefficienti

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = -13$$

- calcolare il determinante della matrice che si ottiene sostituendo la colonna dei coefficienti di x con quella dei termini noti

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - (-7) \cdot 2 = 26$$

- calcolare il determinante della matrice che si ottiene sostituendo la colonna dei coefficienti di y con quella dei termini noti

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-7) - 5 \cdot 4 = -13$$

Se, come in questo caso, $\Delta \neq 0$, il sistema ha soluzione

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} \end{cases}$$ nel nostro caso $$\begin{cases} x = \dfrac{26}{-13} = -2 \\ y = \dfrac{-13}{-13} = 1 \end{cases}$$

2 **ESERCIZIO SVOLTO**

Nella maggior parte dei casi, però, si usa un **metodo misto** fra quelli indicati che risulta essere spesso più veloce.

Vediamo per esempio come risolvere il sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$

Sommiamo membro a membro le due equazioni e riscriviamo la prima: (applicazione del metodo di riduzione) $\begin{cases} 5x = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

Ricaviamo il valore di x dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda: (applicazione del metodo di sostituzione) $\begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ 3 \cdot \dfrac{4}{5} - 2y = 1 \end{cases}$

Risolviamo la seconda equazione: $\begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{7}{10} \end{cases}$

Risolvi i seguenti sistemi lineari applicando il metodo che ritieni più opportuno fra quelli di sostituzione, riduzione e confronto.

3 $\begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ x - 6y = 3 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - y + 2 = 0 \end{cases}$

5 $\begin{cases} -x+y=3 \\ 6x+4y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

6 $\begin{cases} 3x-4y+2=0 \\ x-5y=0 \end{cases}$

7 $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ x+\dfrac{y+2}{4}=1 \end{cases}$

8 $\begin{cases} y+2=\dfrac{x-1}{4} \\ x=\dfrac{2y+5}{3}+1 \end{cases}$

Risolvi applicando il metodo di Cramer.

9 $\begin{cases} 5x-8y=-3 \\ 7x+3y=10 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 4x-6y=5 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

11 $\begin{cases} \dfrac{4}{3}x=1+\dfrac{1}{6}y \\ 2y=\dfrac{8x-9}{3} \end{cases}$

12 $\begin{cases} 3x-y=2(x+y) \\ 1+4x=2y-6 \end{cases}$

13 **ESERCIZIO SVOLTO**

Per risolvere un sistema che ha più di due equazioni in altrettante incognite, è spesso conveniente usare il metodo di sostituzione. Infatti, ricavando una delle incognite da un'equazione e sostituendo la sua espressione in tutte le altre del sistema, si ottiene un nuovo sistema che, trascurando la prima equazione, ha un'incognita di meno.
Iterando il procedimento, l'ultima equazione alla fine contiene una sola incognita che può quindi essere determinata; sostituendo a ritroso i valori delle incognite man mano trovati, si ottiene la soluzione del sistema.

Risolviamo, per esempio il sistema $\begin{cases} x-2y-z=1 \\ 3x-y-2z=-1 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$

Possiamo ricavare l'espressione di x, che ha coefficiente 1, dalla prima equazione

$$\begin{cases} x=2y+z+1 \\ 3x-y-2z=-1 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$$

e sostituire nelle altre $\begin{cases} x=2y+z+1 \\ 3(2y+z+1)-y-2z=-1 \\ 2(2y+z+1)-y+z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2y+z+1 \\ 5y+z=-4 \\ 3y+3z=0 \end{cases}$

Se trascuriamo la prima equazione, le altre due hanno un'incognita di meno perché x è stata eliminata.

Prima di proseguire dividiamo la terza equazione per 3 $\begin{cases} x=2y+z+1 \\ 5y+z=-4 \\ y+z=0 \end{cases}$

Ricaviamo l'espressione di y dalla terza equazione e sostituiamo nella seconda (nello scrivere il sistema abbiamo scambiato le due equazioni):

$$\begin{cases} x=2y+z+1 \\ y=-z \\ -5z+z=-4 \end{cases}$$

Se trascuriamo le prime due equazioni, la terza ha una sola incognita e può essere risolta:

$$-4z = -4 \qquad \rightarrow \qquad z = 1$$

Sostituiamo adesso a ritroso nelle prime due equazioni:

$$\begin{cases} x = -2 + 1 + 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è $S = \{(0, -1, 1)\}$.

14 Risolvi il seguente sistema $\begin{cases} 5x + 3y = 41 \\ 7x - 4y = 0 \\ x + 2y - z = 12 \end{cases}$

15 Risolvi il sistema $\begin{cases} x - y = \dfrac{2 - 3z}{3} \\ \dfrac{x + 1}{z - y} = -6 \\ 9(x - 2y) = 3z + 10 \end{cases}$

(Suggerimento: il sistema è frazionario, devi quindi porre $z \neq$ .....)

16 **ESERCIZIO SVOLTO**

I sistemi ci sono di aiuto per risolvere problemi di varia natura; consideriamo per esempio la seguente situazione.

Tre amici che indichiamo con A, B, C possiedono delle azioni. Il numero delle azioni che possiedono insieme A e B è 1800, il numero delle azioni che possiedono insieme B e C è 1400, il numero delle azioni che possiedono insieme A e C è 1600.
Quante azioni possiedono contemporaneamente i tre amici? Quante azioni possiede A, quante B e quante C?

Dati del problema: $\quad$ az. A + az. $B = 1800$ $\qquad$ az. B + az. $C = 1400$ $\qquad$ az. A + az. $C = 1600$

Se indichiamo con x il numero delle azioni di A, con y quelle di B e con z quelle di C, le precedenti relazioni formano il sistema

$\begin{cases} x + y = 1800 \\ y + z = 1400 \\ x + z = 1600 \end{cases}$ dove le incognite devono soddisfare le condizioni $\quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

Per rispondere alla prima domanda basta sommare membro a membro le tre equazioni:

$$(x + y) + (y + z) + (x + z) = 1800 + 1400 + 1600$$

da cui ricaviamo che $\quad 2(x + y + z) = 4800 \quad$ cioè $\quad x + y + z = 2400$.

Il numero complessivo delle azioni è quindi di 2400.

Per trovare il numero delle azioni di ciascuno dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = 1800 \\ y + z = 1400 \\ x + z = 1600 \end{cases}$$

Ricaviamo x dalla prima equazione e sostituiamo nelle altre

$$\begin{cases} x = 1800 - y \\ y + z = 1400 \\ 1800 - y + z = 1600 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 1800 - y \\ y + z = 1400 \\ y - z = 200 \end{cases}$$

sommiamo e poi sottraiamo membro a membro la seconda e la terza equazione

$$\begin{cases} x = 1800 - y \\ 2y = 1600 \\ 2z = 1200 \end{cases}$$

Troviamo la soluzione del sistema $\begin{cases} x = 1000 \\ y = 800 \\ z = 600 \end{cases}$

In definitiva A possiede 1000 azioni, B ne possiede 800 e C ne possiede 600.

Risolvi i seguenti problemi.

17 Nella frazione $\frac{x}{y}$, se si aumenta il numeratore di 4 e il denominatore di 3 si ottiene una frazione equivalente a $\frac{3}{2}$; si sa inoltre che se si esegue la divisione del numeratore con il denominatore si ottiene 1 come quoziente e 2 come resto. Quanto vale la frazione?

18 Laura ha 7 anni in meno del doppio di quelli di Carla, che, a sua volta ne ha 5 in meno di Alessandra. Tra 4 anni, Laura avrà i $\frac{3}{2}$ dell'età di Carla. Determina quanti anni hanno oggi le tre donne.

19 In un triangolo ABC la somma dei lati AB e BC è 18cm, la somma dei lati BC e AC è 14cm, la somma dei lati AB e AC è 16cm. Quanto misurano i lati del triangolo?

20 In un trapezio isoscele di perimetro 52cm, la somma delle basi è 32cm e la loro differenza è 16cm. Calcola le misure dei lati e l'area del trapezio.

Risultati di alcuni esercizi.

3. $S = \left\{\left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}\right)\right\}$

4. $S = \left\{\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)\right\}$

5. $S = \left\{\left(-\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)\right\}$

6. $S = \left\{\left(-\frac{10}{11}, -\frac{2}{11}\right)\right\}$

7. $S = \left\{\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

8. $S = \left\{\left(\frac{7}{5}, -\frac{19}{10}\right)\right\}$

9. $S = \{(1, 1)\}$

10. $S = \left\{\left(\frac{29}{16}, \frac{3}{8}\right)\right\}$

11. $S = \left\{\left(\frac{27}{40}, -\frac{3}{5}\right)\right\}$

12. $S = \left\{\left(-\frac{21}{10}, -\frac{7}{10}\right)\right\}$

14. $S = \{(4, 7, 6)\}$

15. $S = \left\{\left(1, 0, -\frac{1}{3}\right)\right\}$

17. $\frac{5}{3}$

18. $A : 23;\ C : 18;\ L : 29$

19. $\overline{AB} = 10;\ \overline{BC} = 8;\ \overline{AC} = 6$

20. 24cm, 8cm, 10cm; area $= 96\text{cm}^2$