

APPROFONDIMENTO

Disequazioni in due variabili di maggiore complessità

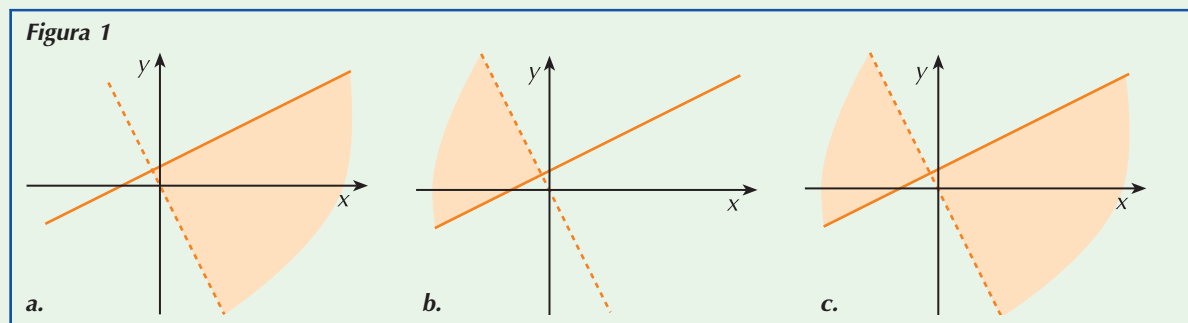
Primo esempio: $\frac{x - 2y + 1}{2x + y} \geq 0$

La frazione ha segno positivo se numeratore e denominatore sono entrambi positivi o entrambi negativi e si annulla quando si annulla il numeratore; dobbiamo quindi risolvere i sistemi

$$\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0 \\ 2x + y > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y + 1 \leq 0 \\ 2x + y < 0 \end{cases}$$

e considerare l'unione dei due insiemi soluzione.

La soluzione del primo sistema è in **figura 1a**, quella del secondo è in **figura 1b**; la soluzione della disequazione è quindi rappresentata dalle regioni in colore di **figura 1c**.



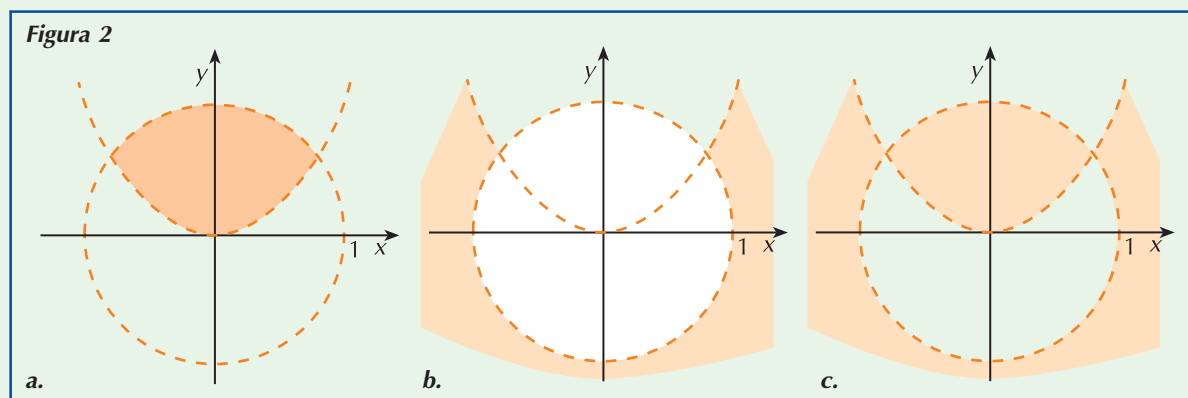
Secondo esempio: $\frac{y - x^2}{x^2 + y^2 - 1} < 0$

La frazione ha segno negativo se numeratore e denominatore sono discordi; dobbiamo quindi risolvere i sistemi

$$\begin{cases} y - x^2 > 0 \\ x^2 + y^2 - 1 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - x^2 < 0 \\ x^2 + y^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

e considerare l'unione dei due insiemi soluzione.

La soluzione del primo sistema è in **figura 2a**, quella del secondo è in **figura 2b**; la soluzione della disequazione è quindi rappresentata dalle regioni in colore di **figura 2c**.



ESERCIZI

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni.

1 $\frac{x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4}{y + x} \geq 0$

2 $\frac{3x - 2y + 1}{x - y} \geq 0$

3 $\frac{x^2 - y}{x^2 + y^2 - 2x} < 0$

4 $\frac{4x^2 + y^2 - 4}{y - x} \leq 0$

5 $\frac{x^2 - 4y^2 - 4}{xy - 1} > 0$

6 ESERCIZIO GUIDATO

$$y - xy - 2x + 3 \geq 0$$

Riscrivi la disequazione in questo modo $y(1 - x) \geq 2x - 3$

Essa è quindi equivalente ai sistemi $\begin{cases} y \geq \frac{2x-3}{1-x} \\ 1-x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y \leq \frac{2x-3}{1-x} \\ 1-x < 0 \end{cases}$

mentre se $x = 1$ ottieni la disequazione $0 > -1$ che è sempre vera.

Devi quindi studiare la funzione di equazione $y = \frac{2x-3}{1-x}$ e distinguere il caso $x < 1$ dal caso $x > 1$.

7 $xy - 2y \geq x$

8 $xy + x^2 \geq 2$

9 $x^2y + x^3 \geq 1$

10 $x^2y - 4y \leq x^2 - 1$

11 $xy \leq x^2 - 3$

12 $y - x^2y - x^3 \leq 0$

13 $\frac{x}{|y-2|} > 0$

14 $x^2 - 9y^2 \geq 0$