Esercizi di consolidamento

Risolvi le seguenti equazioni incomplete.

1 **esercizio guidato**

$2x^2 - 5x = 0$

Scomponiamo raccogliendo x: $\quad x(2x-5) = 0$

Applichiamo la legge di annullamento del prodotto: $\quad x = 0 \vee 2x - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{5}{2}$

Le soluzioni sono: $\quad 0, \ \dfrac{5}{2}$.

2 $5x^2 - 15x = 0 \qquad 13x^2 + 26x = 0$ $\quad [0, 3; 0, -2]$

3 $-3x^2 + 2x = 0 \qquad 7x - 4x^2 = 0$ $\quad \left[0, \dfrac{2}{3}; 0, \dfrac{7}{4}\right]$

4 $15x - 5x^2 = 0 \qquad x^2 - \sqrt{3}x = 0$ $\quad [0, 3; 0, \sqrt{3}]$

5 $\sqrt{5}x^2 + 10x = 0 \qquad 3x - \sqrt{6}x^2 = 0$ $\quad \left[0, -2\sqrt{5}; 0, \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right]$

6 **esercizio guidato**

$9x^2 - 5 = 0$

Ricaviamo x^2: $\quad x^2 = \dfrac{5}{9}$

Applichiamo la definizione di radicale: $\quad x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{9}} \quad \rightarrow \quad x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

7 $9x^2 - 4 = 0 \qquad 4\left(x^2 - \dfrac{7}{4}\right) = 2$ $\quad \left[\pm\dfrac{2}{3}; \pm\dfrac{3}{2}\right]$

8 $-9x^2 = 1 \qquad 10 - 2x^2 = 0$ $\quad$ [impossibile; $\pm\sqrt{5}$]

9 $(3 - 2\sqrt{2}) - x^2 = 0 \qquad \sqrt{2} - 1 + x^2 = 0$ $\quad$ [$\pm(\sqrt{2}-1)$; impossibile]

10 $(10x-1)^2 - (8x-3)(x+1) - 20 = (8x+3)^2 - 73x$ $\quad \left[\pm\dfrac{5\sqrt{7}}{14}\right]$

11 $3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3}(x-3)(x+3) = \dfrac{5}{6}(1+3x)$ $\quad [\pm 1]$

12 $\dfrac{4}{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = \dfrac{5}{6}(x-1)(x+1) - \dfrac{7}{6}$ $\quad [\pm 2]$

13 $(1+x)\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{2-x}{2}\right) + \dfrac{4+7x}{6} = x$ $\quad \left[\pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right]$

14 $\dfrac{4}{x+4} = 1 - \dfrac{2}{x+2}$ $\quad [\pm 2\sqrt{2}]$

Risolvi in R le seguenti equazioni di secondo grado applicando la formula risolutiva.

15 $3x^2 - x - 2 = 0$ $\quad$ $2x^2 - 3x - 5 = 0$ $\quad$ $\left[1, -\frac{2}{3}; -1, \frac{5}{2}\right]$

16 $x^2 - 6x + 4 = 0$ $\quad$ $x^2 + 2x - 8 = 0$ $\quad$ $[3 \pm \sqrt{5}; -4, 2]$

17 $2x^2 + 2x - 40 = 0$ $\quad$ $3x^2 - x + 5 = 0$ $\quad$ [−5, 4; impossibile]

18 $12x^2 + 2x = 2$ $\quad$ $\frac{1}{9}x^2 + \frac{9}{4} + x = 0$ $\quad$ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; -\frac{9}{2}\right]$

19 **esercizio guidato**

$2x^2 - 6x - 8 = 0$

Il coefficiente b è pari ed è quindi conveniente applicare la formula ridotta $\dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$.

Per applicarla in modo semplice osserviamo che il primo termine all'interno della radice è sempre il quadrato del termine esterno, quindi, una volta calcolato il valore di $-\frac{b}{2}$, basta elevarlo al quadrato; nel nostro caso $-\frac{b}{2} = 3$ quindi $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 9$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$$

20 $x^2 + 6x + 8 = 0$ $\quad$ $x^2 + 4x - 5 = 0$ $\quad$ $[-4, -2; -5, 1]$

21 $x^2 - x - 6 = 0$ $\quad$ $x^2 + 8x - 33 = 0$ $\quad$ $[-2, 3; -11, 3]$

22 $x^2 + x - 42 = 0$ $\quad$ $x^2 + 10x - 25 = 0$ $\quad$ $[-7, 6; -5 \pm 5\sqrt{2}]$

23 $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) - (2x+1)^2 = 3\left(\frac{1}{4} + x\right)$ $\quad$ $\left[-2, -\frac{1}{3}\right]$

24 $\frac{x-1}{3} - \frac{2x - x^2}{2} + 6 = -3x + \frac{1}{2} + \frac{(x-1)^2}{6}$ $\quad$ $[-5, -3]$

25 $\frac{\sqrt{2}}{6}x\left(\frac{2x-1}{6}\right) - \frac{x}{3} + \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}x\left[x + \frac{3}{4}(1 - \sqrt{2})\right]$ $\quad$ $\left[-1, \frac{3\sqrt{2}}{10}\right]$

26 $x(2x-1) + \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = (2x-1)^2 - \left[-\left(\frac{x-2}{3} - \frac{5}{18}\right)(x-1) + x\right]$ $\quad$ $\left[\frac{1}{3}, \frac{33}{8}\right]$

27 $\frac{x^2 + 1 - x}{6} = \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{6}\left(\frac{x-1}{2} + \frac{5}{2}\right)$ $\quad$ $[0, 1]$

28 $2\left(-\frac{x+3}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{x+3}{2}\right) + 5x + 1 = 0$ $\quad$ $[-5 \pm 4\sqrt{2}]$

29 $\frac{x-1}{4} + \frac{x^2}{3} = -\frac{1}{12} + \frac{5}{6}x\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{x(x+2)}{4}$ $\quad$ [impossibile]

30 $\frac{1}{2}[3(x^2 - 3x) + 4] + (3x^2 - 5x + 6) = \frac{(x+2)(x-1)}{2} - \frac{(4-x)(x-3)}{2}$ $\quad$ $\left[\frac{6}{7}, 1\right]$

31 $\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(x+1)^2}{6}=\dfrac{11}{24}-\dfrac{5}{48}x-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{4}{3}x\cdot\dfrac{2x-3}{4}-x\left(x-\dfrac{3}{8}\right)\right]$ $\left[\dfrac{3\pm\sqrt{15}}{3}\right]$

32 $\dfrac{x^2+4}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}x}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{8+x^2(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}-2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$ $[-\sqrt{2},\ 4-2\sqrt{2}]$

33 $\dfrac{5}{12}+\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^3-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{x}{3}+1\right)-\dfrac{1}{3}\left(2x^3-\dfrac{81}{8}\right)=0$ $\left[-\dfrac{1}{35},\ 1\right]$

Risolvi in R le seguenti equazioni frazionarie di secondo grado.

34 **esercizio guidato**

$\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{10}{3x-1}$

Per l'esistenza dell'equazione deve essere $x\neq 1\ \wedge\ x\neq\dfrac{1}{3}$

Il dominio dell'equazione è quindi $R-\left\{1,\ \dfrac{1}{3}\right\}$.

Svolgiamo i calcoli riconducendo l'equazione alla sua forma normale:

$\dfrac{x(3x-1)}{(x-1)(3x-1)}=\dfrac{10(x-1)}{(x-1)(3x-1)}\ \rightarrow\ 3x^2-x=10x-10\ \rightarrow\ 3x^2-11x+10=0$

Applichiamo la formula risolutiva: $x=\dfrac{11\pm\sqrt{121-120}}{6}=\dfrac{11\pm 1}{6}=\begin{cases}2\\ \dfrac{5}{3}\end{cases}$

Entrambe le soluzioni appartengono al dominio, quindi $2,\ \dfrac{5}{3}$.

35 $\dfrac{4}{3-2x}=8+\dfrac{5x-1}{x+1}$ $\qquad\dfrac{13+3x}{3(3x+1)}=\dfrac{(3x+1)}{6}$ $\left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{17}{13};\ \pm\dfrac{5}{3}\right]$

36 $\dfrac{3x}{x^2-4}=\dfrac{4x}{x-2}+\dfrac{6x}{x+2}$ $\qquad\dfrac{7-x}{x-5}=\dfrac{13}{6}-\dfrac{x-5}{7-x}$ $\left[0,\ \dfrac{7}{10};\ \dfrac{29}{5},\ \dfrac{31}{5}\right]$

37 $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{6}{x^2-x-2}=\dfrac{5}{x+1}$ [impossibile]

38 $\dfrac{5}{x+5}=1-\dfrac{4}{x+4}$ $[\pm 2\sqrt{5}]$

39 $\dfrac{(x+1)^3}{x^2+2x+1}=\dfrac{1}{2x}$ $\left[\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right]$

40 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}-3=0$ $\left[-\dfrac{2}{3},\ 1\right]$

41 $\dfrac{2}{x^2-3x+2}+\dfrac{2x(3-x)+4}{x^3-2x^2-x+2}=0$ $[2\pm\sqrt{7}]$

42 $\dfrac{1}{x-2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{x^2-8}+\dfrac{1+2\sqrt{2}}{x^2+8-4\sqrt{2}x}=0$ $[-2(1+\sqrt{2}),\ 0]$

43 $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{6}{2x-7}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{5}{2x^2-9x+7}$ $\left[\dfrac{95}{18}\right]$

44 $\dfrac{x-2}{x-1}-2=\dfrac{3}{2-x}+\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$ [impossibile]

45 $\dfrac{1-4x}{1-x}-\dfrac{1}{x^2-2x+1}=1+\left(1+\dfrac{2}{x}\right):\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ $\left[\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right]$

46 $\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{2}}+\dfrac{x}{x-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{32}{1-4x^2}=0$ $[\pm 2]$

Risolvi in R le seguenti equazioni letterali intere di secondo grado.

47 **esercizio guidato**

$(a+1)x^2-2ax+a-1=0$

L'equazione si presenta già in forma normale e possiamo procedere alla sua risoluzione. Discutiamo il coefficiente del termine di secondo grado:

- se $a+1\neq 0$ cioè se $a\neq -1$

  possiamo applicare la formula risolutiva; visto poi che il coefficiente del termine di primo grado è divisibile per 2, possiamo usare la formula ridotta.

  Calcoliamo dapprima il discriminante: $\dfrac{\Delta}{4}=a^2-(a+1)(a-1)=a^2-a^2+1=1$

  Applichiamo la formula: $x=\dfrac{a\pm 1}{a+1}=\begin{cases}\dfrac{a-1}{a+1}\\[2mm] \dfrac{a+1}{a+1}=1\end{cases}$

- se $a+1=0$ cioè se $a=-1$

  non possiamo applicare la formula; sostituendo questo valore nell'equazione otteniamo:

  $(-1+1)x^2+2x-1-1=0 \quad\rightarrow\quad 2x-2=0 \quad\rightarrow\quad x=1$

Riassumendo: se $a\neq -1: 1,\ \dfrac{a-1}{a+1}$; se $a=-1: 1$.

48 $\left(x-\dfrac{a}{9}\right)^2-\left(3x-\dfrac{a}{3}\right)^2=-\dfrac{8}{81}a^2$ $\left[0,\ \dfrac{2}{9}a\right]$

49 $2x(a-1)-2(a-2)=\dfrac{1}{2}\left[(x+1)^2+(x-1)^2\right]$ $[1,\ 2a-3]$

50 $(x+2)^2=(a+2)^2-a^2$ $\left[\text{se } a\geq -1: -2\pm 2\sqrt{1+a}\right]$

51 $x(3a+x+1)+(3a+x-1)(6a+x)=2[1+3a(3a+1)]$ $[1,\ -(6a+1)]$

52 $(3a-x)(3a+x)+(x+3a)^2-9(a^2+x^2)=0$ $\left[\dfrac{a}{3}(1\pm\sqrt{10})\right]$

53 $a(x-2)+x(x-2)=0$ $[-a,\ 2]$

54 $4x-3(ax+1)=x^2(1-a)$ $\left[a\neq 1: \dfrac{1}{1-a},\ 3;\ a=1: 3\right]$

55 $2x(2a-1)-6a=x^2(1-2a)-3$ $\left[a\neq\frac{1}{2}: -3,\ 1;\ a=\frac{1}{2}: \text{indeterminata}\right]$

56 $(x-1)^2+a^2x-3x^2(a^2-1)+a^3x^2=3+a(x+2)$ $\left[\begin{array}{l} a\neq -1 \wedge a\neq 2: \frac{2}{2-a},\ \frac{1}{a-2};\\ a=-1: R;\ a=2: \text{impossibile}\end{array}\right]$

57 **esercizio guidato**

$$\frac{x}{a}+x^2=\frac{6}{a^2}$$

Condizioni sul parametro: $a\neq 0$

Riduciamo l'equazione in forma normale: $a^2x^2+ax-6=0$

Abbiamo già posto la condizione $a\neq 0$ relativa al coefficiente di x^2, possiamo quindi applicare la formula risolutiva:

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+24a^2}}{2a^2}=\frac{-a\pm 5a}{2a^2}=\begin{cases} -\dfrac{3}{a}\\[2mm] \dfrac{2}{a}\end{cases}$$

Riassumendo: se $a\neq 0: -\frac{3}{a},\ \frac{2}{a}$

se $a=0$: l'equazione perde significato.

58 $\dfrac{4ax}{(a+1)^2}+(a-1)^2=\dfrac{x^2}{(a+1)^2}$ $\left[\begin{array}{l} a\neq -1: (a+1)^2,\ -(a-1)^2;\\ a=-1: \text{l'equazione perde significato}\end{array}\right]$

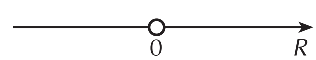
59 $x(x+a)=\dfrac{a+x}{a+2}$ $\left[a=-2: \text{l'equazione perde significato};\ a\neq -2: \frac{1}{a+2},\ -a\right]$

Risolvi in R le seguenti equazioni letterali frazionarie di secondo grado.

60 **esercizio guidato**

$$(a+1)x-\frac{2(x-a)}{x}=a(a+1)$$

L'equazione è frazionaria e quindi deve essere $x\neq 0$;



il dominio dell'incognita è allora $R-\{0\}$. Svolgiamo i calcoli:

$(a+1)x^2-2(x-a)=ax(a+1)$ $\rightarrow$ $(a+1)x^2-2x+2a-a^2x-ax=0$ $\rightarrow$

$(a+1)x^2-x(a^2+a+2)+2a=0$

- se $a\neq -1$ possiamo applicare la formula risolutiva. Calcoliamo innanzi tutto il discriminante:

  $\Delta=(a^2+a+2)^2-8a(a+1)=a^4+a^2+4+2a^3-4a^2-4a=(a^2+a-2)^2$

  Applichiamo la formula: $x=\dfrac{(a^2+a+2)\pm(a^2+a-2)}{2(a+1)}=\begin{cases}\dfrac{2}{a+1}\\[2mm] a\end{cases}$

Stabiliamo se le soluzioni sono accettabili:

- $x_1 \neq 0 \qquad \dfrac{2}{a+1} \neq 0 \qquad \forall a \neq -1$ condizione già posta
- $x_2 \neq 0 \qquad a \neq 0$

- se $a=-1$ l'equazione diventa $-2x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=-1$.

Dunque

- se $a \neq -1 \ \wedge \ a \neq 0 : \dfrac{2}{a+1}, \ a$
- se $a=0$ la seconda soluzione non è accettabile, la prima diventa $\dfrac{2}{1}$, quindi 2
- se $a=-1 : -1$.

61 $\dfrac{a}{x^2+x-2ax-2a} = \dfrac{2}{x-2a} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{a}$

$\left[a \neq 0 \ \wedge \ a \neq -1 \ \wedge \ a \neq -\dfrac{2}{3} : a, \ \dfrac{a-2}{2};\right.$ $a=0$: l'equazione perde significato; $a=-1 : -\dfrac{3}{2}$; $\left. a=-\dfrac{2}{3} : -\dfrac{2}{3}\right]$

62 $\dfrac{2(6-a)}{2x-a} - \dfrac{3}{x} = 1$

$\left[a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 6 : 3, -\dfrac{a}{2}; \ a=0 : 3; \ a=6 : -3\right]$

63 $\dfrac{-a}{ax-x} + \dfrac{x}{a^2-a} = \dfrac{1}{a-1}$

$\left[a \neq 1 \ \wedge \ a \neq 0 : \dfrac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2};\right.$ $a=1 \ \vee \ a=0$: l'equazione perde significato$\left.\right]$

64 $\dfrac{a+x}{(x-2)^2} = \dfrac{a-x+5}{x^2-5x+6} - \dfrac{a}{(x-3)(x^2-4x+4)}$

$\left[\dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\right]$

65 $\dfrac{2(x+1)}{x+2a} - \dfrac{2x+6}{3ax+2a^2+x^2} = \dfrac{x+1}{x+a}$

$\left[a \neq 1 \wedge a \neq 2 \wedge a \neq -\dfrac{3}{2} \wedge a \neq -3 : -2, \ 3;\right.$ $a=1 \vee a=2 : 3$; $\left. a=-\dfrac{3}{2} \vee a=-3 : -2\right]$

66 $\dfrac{2-5a}{(a-2x)(5x-1)} + \dfrac{5(3a+2x)}{5x-1} = \dfrac{5x+2}{2x-a}$

$\left[a \neq \dfrac{2}{5} \wedge a \neq \dfrac{1}{5} \wedge a \neq 0 : a, \ 3a-1;\right.$ $a=\dfrac{2}{5} : \dfrac{2}{5}$; $a=\dfrac{1}{5} : -\dfrac{2}{5}$; $\left. a=0 : -1\right]$

67 $\dfrac{bx-b}{b-1} + \dfrac{x+b}{b-1} = \dfrac{3x}{x-1}$

$\left[b \neq \pm 1 : 0, \ \dfrac{4b-2}{b+1};\right.$ $b=1$: l'equazione perde significato; $\left. b=-1 : 0\right]$

68 $\frac{x}{x+b}-\frac{x-1}{x-b}=\frac{3-4b}{3b}$

$\left[b\neq 0 \wedge b\neq \frac{3}{4} \wedge b\neq 1: 2b,\ \frac{b(3-2b)}{4b-3};\right.$
$b=0:$ l'equazione perde significato;
$\left. b=\frac{3}{4}: \frac{3}{2};\ b=1:2\right]$

69 $\frac{x+7}{x-a}+\frac{x-2}{x-1}=\frac{x^2-10+3a}{x^2-x-ax+a}$

$\left[a\neq -1 \wedge a\neq 4: -1,\ a-3;\right.$
$a=-1: -4;$
$\left. a=4: -1\right]$

70 $\frac{x-2a}{a+1}\left(\frac{2}{a+x}+1\right)+\frac{(2a+1)}{a+x}=0$

$\left[a\neq -1 \wedge a\neq 1 \wedge a\neq \frac{1}{2}: -1,\ a-1;\right.$
$a=-1:$ l'equazione perde significato;
$\left. a=1:0;\ a=\frac{1}{2}: -1\right]$

Di due numeri sono noti la somma s e il prodotto p; determina tali numeri nei seguenti casi.

71 **esercizio guidato**

$s=2 \qquad p=-\frac{1}{3}$

Dobbiamo risolvere l'equazione

$$x^2-2x-\frac{1}{3}=0 \quad\rightarrow\quad 3x^2-6x-1=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{3\pm 2\sqrt{3}}{3}$$

I due numeri sono quindi: $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$.

72 $s=1 \qquad p=\frac{2}{9}$

73 $s=1 \qquad p=\frac{17}{4}$

74 $s=\frac{5}{4} \qquad p=\frac{3}{8}$

75 $s=8 \qquad p=17$

76 $s=2\sqrt{2}+1 \qquad p=\sqrt{2}$

77 $s=\frac{5}{2} \qquad p=-\frac{3}{2}$

78 $s=2 \qquad p=2$

79 $s=2a \qquad p=a^2-4$

80 $s=-\frac{3}{10} \qquad p=-\frac{1}{10}$

81 $s=3a+1 \qquad p=2a^2+a$

82 $s=2\sqrt{3}-1 \qquad p=3-\sqrt{3}$

83 $s=1+\sqrt{3} \qquad p=\sqrt{3}$

84 $s=\sqrt{5}-2 \qquad p=-2\sqrt{5}$

85 $s=4\sqrt{3}-\sqrt{2} \qquad p=8-2\sqrt{6}$

86 $s=\sqrt{7} \qquad p=\sqrt{7}-1$

87 $s=3\sqrt{3}-1 \qquad p=6-2\sqrt{3}$

Scrivi l'equazione che ha per soluzioni i numeri dati.

88 **esercizio guidato**

$x_1=3 \quad \vee \quad x_2=-7$

$x_1+x_2=3-7=-4$ e $x_1\cdot x_2=3\cdot(-7)=-21$. L'equazione cercata è $x^2+4x-21=0$.

89 $x_1 = 5$ $x_2 = 8$

90 $x_1 = 1$ $x_2 = \frac{1}{2}$

91 $x_1 = \sqrt{2}$ $x_2 = -6$

92 $x_1 = \sqrt{3} + 1$ $x_2 = \sqrt{3} - 1$

93 $x_1 = 4$ $x_2 = a$

94 $x_1 = \frac{a}{2}$ $x_2 = \frac{b}{2}$

95 $x_1 = -3a$ $x_2 = 2$

96 $x_1 = -3$ $x_2 = \sqrt{2}$

97 $x_1 = -\frac{5}{3}$ $x_2 = \frac{3}{10}$

98 $x_1 = a$ $x_2 = a + 1$

99 $x_1 = a + 1$ $x_2 = 2a - 1$

100 $x_1 = a + \sqrt{2}$ $x_2 = -a - \sqrt{2}$

101 $x_1 = 2ab$ $x_2 = a - b$

102 $x_1 = a - \sqrt{3}$ $x_2 = a + \sqrt{3}$

103 $x_1 = \frac{a-2}{1-a}$ $x_2 = \frac{a+1}{a-2}$

104 $x_1 = a - b$ $x_2 = \frac{1}{a-b}$

105 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3-a}}$ $x_2 = -\sqrt{3-a}$

106 $x_1 = -\frac{1}{2a+3b}$ $x_2 = -\frac{1}{2a-3b}$

Scomponi in fattori i seguenti trinomi.

107 **esercizio guidato**

$6x^2 + 7x - 3$

Determiniamo le soluzioni dell'equazione associata:

$6x^2 + 7x - 3 = 0$ $\qquad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49+72}}{12} = \frac{-7 \pm 11}{12} = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$

Allora: $6x^2 + 7x - 3 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{2x+3}{2}\right)\left(\frac{3x-1}{3}\right) = (2x+3)(3x-1)$

108 $x^2 - 3x - 4$ $\qquad 10x^2 - 27x - 28$

109 $45x^2 + 3x - 84$ $\qquad x^2 + 2x + 3$

110 $2x^2 - \sqrt{2}x - 2$ $\qquad x^2 + 3x + 4$

111 $x^2 + x + 5$ $\qquad 2x^2 - 3x - 2$

112 $3x^2 + 4x + 7$ $\qquad x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

113 $a(a+1)x^2 + x - 1$ $\qquad 28x^2 + x(7-4a) - a$

114 $x^2 - (2\sqrt{2} + \sqrt{3})x + 2\sqrt{6}$ $\qquad 2x^2 + x\left(a - 2\sqrt{3}\right) - a\sqrt{3}$

115 $12x^2 + 2x - 4$ $\qquad 2ax^2 + \left(2a - \frac{2a^2}{3}\right)x - \frac{2}{3}a^2$

116 $10x^2 + 4\sqrt{6}x - 30$ $\qquad \frac{1}{2}x^2 - 3ax + 4a^2$

117 $2x^2 + 2bx + 5b^2$ $\qquad 2ax^2 - x(2-3a) - 3$

Tenendo presenti le relazioni fra i coefficienti di un'equazione di secondo grado e le sue soluzioni, trova i valori dei parametri che soddisfano le condizioni richieste.

118 **esercizio guidato**

Dette x_1 e x_2 le soluzioni dell'equazione $x^2 + (k-4)x - 4k = 0$ determina il valore del parametro k affinchè sia:

a. $x_1 = x_2$ **b.** $x_1 \cdot x_2 = 3$ **c.** $x_1 + x_2 = -2$ **d.** $x_1 = \frac{1}{2}x_2$

Le soluzioni sono reali se $\Delta \geq 0$: $(k-4)^2 + 16k \geq 0$ $(k+4)^2 \geq 0$ $\forall k \in R$

In queste ipotesi affrontiamo i quesiti.

a. Le soluzioni sono coincidenti se $\Delta = 0$, cioè se $k = -4$

b. Il prodotto delle soluzioni è $\frac{c}{a}$ e deve essere uguale a 3 : $-4k = 3 \rightarrow k = \dots\dots\dots$

c. La somma delle soluzioni è $-\frac{b}{a}$ e deve essere uguale a -2 : $4 - k = -2 \rightarrow k = \dots\dots\dots$

d. Scrivi il sistema: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 \\ x_1 + x_2 = 4 - k \\ x_1 \cdot x_2 = -4k \end{cases}$

Sostituendo nelle ultime due equazioni l'espressione di x_1 ricavata dalla prima ottieni (abbiamo eliminato la prima equazione perché ci interessa determinare solo k):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_2 + x_2 = 4 - k \\ \frac{1}{2}x_2^2 = -4k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{8-2k}{3} \\ \frac{1}{2}x_2^2 = -4k \end{cases}$$

Sostituendo infine nella terza equazione l'espressione di x_2 ottieni l'equazione:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{8-2k}{3}\right)^2 = -4k$$

che, risolta, dà il valore di k richiesto. $\left[\textbf{b}.\ k = -\frac{3}{4};\ \textbf{c}.\ k = 6;\ \textbf{d}.\ k = -8 \lor k = -2\right]$

119 Determina il valore del parametro b in modo che l'equazione $(b^2 - 4)x^2 - 2bx + 1 = 0$:

a. abbia il prodotto delle soluzioni uguale a $-\frac{9}{32}$ $\left[b = \pm\frac{2}{3}\right]$

b. abbia la somma dei reciproci delle soluzioni uguale a 4 $[\nexists b]$

c. abbia una soluzione uguale a 1 $[b = -1 \lor b = 3]$

d. sia di primo grado. $[b = 2 \lor b = -2]$

(Suggerimento: **b.** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ è la somma dei reciproci delle soluzioni che può anche essere scritta così $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$, quindi...)

120 Data l'equazione $8x^2 - (k-1)x + k - 7 = 0$ ed indicate con x_1 e x_2 le sue soluzioni, determina il valore di k in modo che sia:

a. $x_1 = x_2$ **b.** $x_1 = -\dfrac{1}{x_2}$ $[$**a**. $k = 25 \vee k = 9$; **b**. $k = -1]$

c. $x_1 = -3$ **d.** $x_1 = -x_2$ $\left[\text{c. } k = -\dfrac{31}{2};\ \text{d. } k = 1\right]$

121 Nell'equazione $4x^2 - 4mx + m^2 - 9 = 0$, determina il valore del parametro m in modo che siano verificate le seguenti condizioni:

a. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -\dfrac{1}{2}$ **b.** $x_1 = \dfrac{3}{4x_2}$ $[$**a**. $m = -9 \vee m = 1$; **b**. $m = \pm 2\sqrt{3}]$

c. $x_1 = 0$ **d.** $x_2 = 3x_1$ $[$**c**. $m = \pm 3$; **d**. $m = \pm 6]$

122 Nell'equazione $x^2 + 2(k-2)x + 1 = 0$ determina il valore del parametro k in modo che:

a. $x_1 = \dfrac{1}{2}$ **b.** $x_1 = 9 - x_2$ $\left[\text{a. } k = \dfrac{3}{4};\ \text{b. } k = -\dfrac{5}{2}\right]$

c. $x_1^2 + x_2^2 = 14$ **d.** $\dfrac{1}{x_1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{x_2}$ $[$**c**. $k = 0 \vee k = 4$; **d**. $\nexists k]$

123 Determina il valore del parametro k affinché l'equazione $kx^2 - (k-2)x + k - 1 = 0$ abbia:

a. radici coincidenti $\left[k = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

b. la somma delle radici uguale a 2 $[\nexists k]$

c. soluzioni reciproche $[\nexists k]$

d. la somma dei reciproci delle radici uguale a 3 $\left[k = \dfrac{1}{2}\right]$

124 Data l'equazione $x^2 + x(3 - 2m) - 6m = 0$ determina il valore del parametro m affinchè:

a. il doppio prodotto delle soluzioni sia uguale alla loro somma $\left[m = \dfrac{3}{14}\right]$

b. le due soluzioni coincidano $\left[m = -\dfrac{3}{2}\right]$

c. non si abbiano soluzioni reali $[\nexists m]$

125 Data l'equazione $x^2 + (3 - x)(1 - kx) = 3x$ determina il valore del parametro k in modo che:

a. il doppio del prodotto delle soluzioni sia uguale a 1 $[k = 5]$

b. il prodotto delle soluzioni superi di 3 la loro somma $\left[k = -\dfrac{2}{3}\right]$

c. il rapporto fra le soluzioni sia uguale a -2 $\left[k = -\dfrac{7}{6} \vee k = -\dfrac{5}{3}\right]$

126 Data l'equazione $x(2 - x) + ax^2 + 2a = 3ax$, riscrivila nella forma normale e determina poi il valore del parametro a affinché:

a. una soluzione sia uguale a 3 $\left[a = \dfrac{3}{2}\right]$

b. si abbiano due soluzioni coincidenti uguali a 3 $[\nexists a]$

c. si abbiano due soluzioni coincidenti uguali a 2 $[a = 2]$

d. il prodotto delle soluzioni sia uguale a 8 $\left[a = \dfrac{4}{3}\right]$

127 Data l'equazione $x^2(a-2)-a(x-1)(a-1)+x=0$, riscrivila nella forma normale e determina poi il valore del parametro a affinchè:

a. il prodotto delle soluzioni sia uguale a 6 $[a=3 \vee a=4]$

b. una soluzione sia uguale a 3 $\left[a=3 \vee a=\frac{5}{2}\right]$

c. le soluzioni siano opposte $\left[a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right]$

Problemi di natura algebrica

128 Trova due numeri naturali consecutivi il cui prodotto sia 306. [17, 18]

129 Trova due numeri consecutivi tali che la somma dei loro quadrati sia 25. $[-4, -3 \ \vee \ 3, 4]$

130 Trova due numeri positivi consecutivi pari tali che la somma dei loro quadrati sia 100. [6, 8]

131 Determina in R^+ un numero tale che il prodotto fra il numero stesso diminuito di $\sqrt{5}$ e il numero stesso sommato a 2 sia uguale a $\frac{5}{9}$. $\left[\frac{3+5\sqrt{5}}{6}\right]$

132 Il quadrato di un numero razionale è uguale al numero stesso aumentato di 6. Trova il numero. $[-2 \ \vee \ 3]$

133 Trova tre numeri interi consecutivi tali che la somma dei quadrati del primo e del terzo superi di 68 il secondo. [5, 6, 7]

134 Il doppio del quadrato di un numero reale sommato a 1 è uguale a 5 volte il numero stesso aumentato di 4. Qual è il numero? $\left[3 \ \vee \ -\frac{1}{2}\right]$

135 Di tre numeri naturali consecutivi si sa che il prodotto dei primi due addizionato al prodotto del secondo e del terzo è uguale al quadruplo della loro somma. Quali sono i tre numeri? [5, 6, 7]

136 Determina il numero di due cifre in cui la cifra delle unità supera di due quella delle decine sapendo che il suo quadrato, aumentato del doppio della somma delle cifre, è uguale a 177. [13]

137 La differenza fra il multiplo di un numero secondo 18 e l'inverso del numero stesso è 3. Trova tale numero. $\left[-\frac{1}{6} \vee \frac{1}{3}\right]$

138 La somma dei quadrati di due numeri naturali consecutivi è uguale al doppio del minore di essi. Trova i due numeri. [impossibile]

Problemi nel mondo reale

139 In un torneo di tennis fra amici ognuno gioca con ciascuno degli altri una sola volta. Se le partite giocate sono in tutto 28, quanti sono i giocatori? [8]

140 La somma delle età di due amici è 34. Fra due anni il prodotto delle loro età sarà 360. Quanti anni ha ciascun amico? [16, 18]

141 Una palla è lanciata verticalmente verso l'alto a partire dal suolo con una velocità iniziale $v_0 = 29{,}4\text{m/s}$. Dopo quanto tempo la palla sarà a 39,2m di altezza dal suolo? Interpreta i risultati ottenuti.

(Suggerimento: il moto è uniformemente decelerato e l'equazione oraria è $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$) [2*s*, 4*s*]

142 Un corpo parte con velocità iniziale di 2m/s e subisce un'accelerazione di $0{,}2\text{m/s}^2$ percorrendo un certo spazio *y*. Un secondo corpo parte con velocità iniziale di 1m/s e subisce un'accelerazione di $0{,}4\text{m/s}^2$ percorrendo lo stesso spazio *y*. Quanto dura il moto di ognuno dei due corpi? Qual è lo spazio percorso? [10s, 30m]

Problemi di natura geometrica

143 In un parallelogramma *ABCD* la diagonale *AC* è perpendicolare al lato *AD*; si sa inoltre che $\overline{AB} = 25a$ e che l'area del parallelogramma è $300a^2$. Calcola la misura delle diagonali. $\left[20a,\ 10a\sqrt{13}\right]$

144 In un triangolo isoscele la base supera il lato obliquo di 3cm e l'altezza è 12cm. Determina la lunghezza della corda parallela alla base che divide il triangolo in due parti equivalenti. $\left[9\sqrt{2}\text{cm}\right]$

145 In un cerchio di diametro *AB* si conduca la corda *BC*, che misura $\frac{15}{4}a$, in modo che la sua proiezione sul diametro sia i $\frac{9}{25}$ del diametro stesso. Dopo aver trovato la lunghezza del diametro, calcola il perimetro e l'area del triangolo *ABC*. $\left[\overline{AB} = \frac{25}{4}a;\ 2p = 15a,\ \text{area} = \frac{75}{8}a^2\right]$

146 È dato il triangolo scaleno *ABC* nel quale le proiezioni dei lati *AB* e *AC* sul lato *BC* sono rispettivamente uguali ai $\frac{4}{5}$ e ai $\frac{3}{5}$ del lato *AB*. Sapendo che l'altezza *AH* è lunga 30cm calcola il perimetro e l'area del triangolo. $\left[2p = 30\left(4+\sqrt{2}\right)\text{cm},\ \text{area} = 1050\text{cm}^2\right]$

147 Un triangolo *ABC* ha gli angoli adiacenti alla base *AB* di 60° e 45°. Sapendo che la sua area è $\frac{2}{3}\sqrt{3}a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$, trovane il perimetro. $\left[2a\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]$

148 Su un segmento *AB* lungo 20cm considera un punto *P* e costruisci il triangolo *APD* rettangolo in *A* con l'angolo $\widehat{APD}$ che misura 30°. Determina la lunghezza del segmento *AP* in modo che tale triangolo sia equivalente al rettangolo di lati *AP* e *BP* diminuito di $\left(96 - 24\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$.

$$\left[AP = \left(\frac{108 - 40\sqrt{3}}{11}\right)\text{cm} \ \vee\ 12\text{cm}\right]$$

149 Su un segmento $\overline{AB} = 2\ell$ prendi un punto *P* e traccia le circonferenze di diametri *AP* e *PB*; sia *r* una delle tangenti comuni alle due circonferenze non perpendicolare ad *AB*. Detti *R* ed *S* i punti di intersezione con le circonferenze, determina la lunghezza del segmento *PB* in modo che $\overline{RS}^2 = \frac{3}{4}\ell^2$. $\left[\frac{1}{2}\ell \ \vee\ \frac{3}{2}\ell\right]$

150 Dato il triangolo equilatero *ABC* di lato $\overline{AB} = \ell$, sia *r* una retta parallela al lato *CB* che interseca in *D* e in *E* i lati *AC* e *AB*. Su *r*, ed esternamente al triangolo, considera un punto *P* in modo che $PD \cong DE$. Determina come deve essere tracciata la retta *r* in modo che $\overline{PA}^2 + \overline{PK}^2 = \frac{29}{12}\ell^2$ essendo *K* il piede dell'altezza uscente dal vertice *A*. $\left[\overline{PD} = \frac{2}{3}\ell\right]$

151 In un parallelogramma avente il perimetro di 80cm la diagonale AC è perpendicolare al lato AD ed il loro rapporto è $\frac{4}{3}$. Dopo aver determinato le lunghezze dei lati del parallelogramma, determina un punto P su AD in modo che $\overline{PC}^2 = \frac{4}{5}\overline{DC}^2$. $[AP = 10\text{cm}]$

152 In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e di centro O, considera un punto C su OA ed un punto D su OB in modo che $CO \cong 2OD$. Indicati rispettivamente con P e con Q le intersezioni delle perpendicolari al diametro in C e D con la semicirconferenza, determina la misura, in funzione del raggio, del segmento OD in modo che: $\overline{CP}^2 + \overline{DQ}^2 = \frac{13}{9}\overline{CD}^2$. $\left[\overline{OD} = \frac{1}{3}r\right]$

153 In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono di 30° e l'area misura $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\text{cm}^2$. Calcola il perimetro del triangolo. $\left[\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+2\right)\text{cm}\right]$

154 Sul segmento AB di misura ℓ determina un punto P in modo che, disegnata la circonferenza di diametro AP e tracciata la tangente BT ad essa uscente da B, sia verificata la relazione $\overline{BT}^2 + \overline{AP}^2 = \frac{35}{2}\overline{PB}^2$. $\left[\overline{AP} = \frac{34 \pm \sqrt{67}}{33}\ell\right]$

155 Un trapezio isoscele è inscritto in una semicirconferenza di raggio 50cm; di esso si sa che l'altezza è i $\frac{2}{3}$ della base minore. Calcola il perimetro e l'area del trapezio. $\left[2p = 40\left(4+\sqrt{5}\right)\text{cm};\ A = 3\,200\text{cm}^2\right]$